



Espaces de travail et planification de trajectoire des robots parallèles plans

Jean-Pierre Merlet, Nicolas Mouly

► To cite this version:

Jean-Pierre Merlet, Nicolas Mouly. Espaces de travail et planification de trajectoire des robots parallèles plans. [Rapport de recherche] RR-2291, INRIA. 1994. inria-00077222

HAL Id: inria-00077222

<https://inria.hal.science/inria-00077222>

Submitted on 29 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Espaces de travail et planification de trajectoire
des robots parallèles plans***

Jean-Pierre MERLET, Nicolas MOULY

N° 2291

Février 1994

PROGRAMME 4

Robotique,
image
et vision

 ***rapport
de recherche***

1994

Espaces de travail et planification de trajectoire des robots parallèles plans

Jean-Pierre MERLET, Nicolas MOULY

Programme 4 — Robotique, image et vision
Projet Prisme

Rapport de recherche n° 2291 — Février 1994 — 71 pages

Résumé : Nous présentons des algorithmes géométriques permettant de calculer différents types d'espaces de travail des robots parallèles plans:

espace à orientation fixe c'est-à-dire l'ensemble des positions atteignables par l'organe terminal avec une orientation fixée.

espace maximal c'est-à-dire l'ensemble des positions atteignables par l'organe terminal avec au moins une orientation.

espace à orientation inclusive c'est-à-dire l'ensemble des positions atteignables avec au moins une orientation dans un intervalle donné.

espace à orientation totale c'est-à-dire l'ensemble des positions atteignables avec toutes les orientations d'un intervalle donné.

espace dextre c'est-à-dire l'ensemble des positions atteignables avec toutes les orientations possibles.

Dans la seconde partie de ce rapport nous présentons des algorithmes permettant la planification des mouvements du robot qui utilisent la connaissance de ces divers types d'espace.

Mots-clé : espace de travail, planification de trajectoire, robot parallèle plan

(Abstract: *pto*)

. Ce travail a été en partie financé par le projet ESPRIT Basic Research Action 6546 (PROMotion).

Workspaces and Motion planning of planar parallel manipulators

Abstract: We present geometrical algorithms enabling to compute various workspaces of planar parallel manipulators:

- *workspace for a given orientation* i.e. the region which can be reached by the reference point of the robot when its orientation is fixed.
- *reachable workspace* i.e. the region which can be reached by the end-effector with at least one orientation.
- *inclusive orientation workspace* i.e. the region which can be reached with a least one orientation in a given set.
- *total orientation workspace* i.e. the region which can be reached with at least all the orientations in a given set.
- *dextrous workspace* i.e. the region which can be reached with all the possible orientations.

In the second part we present various algorithms for planning the motion of the robot in its workspace using the knowledge of the various workspaces.

Key-words: workspace, motion planning, planar parallel robot

Chapitre 1

Espaces de travail

1.1 Introduction

1.1.1 Types de robots parallèles plans

On distingue différentes sortes de robots parallèles plans selon le type de chaîne cinématique joignant la plate-forme mobile au sol. Le robot qui sera le principal sujet de notre étude est désigné sous le nom de robot 3 – RPR car les trois chaînes, identiques, sont constituées d’une articulation rotoïde (R) suivie d’un actionneur prismatique (P) qui est relié à un des sommets de la plate-forme mobile par une articulation rotoïde (figure 1.1). Nous nous intéresserons principalement au robot 3 – RPR de type a). Un des autres types de robots parallèles plans est le robot 3 – RRR dont chaque chaîne cinématique est constituée de deux segments connectés par une articulation rotoïde, les chaînes étant reliées au sol et à la plate-forme mobile par des articulations rotoïdes (figure 1.2), l’articulation rotoïde reliée au sol étant motorisée.

Ce type de robot plan a été plus particulièrement étudié à l’Université McGill de Montréal par Gosselin et Ma [4], [14] et cette architecture a été mentionnée par Hunt [7]. Pour ce robot on notera l_1^i la longueur du segment A_iM_i et l_2^i celle du segment M_iB_i .

Enfin mentionnons la possibilité d’un robot de type 3 – PRR où une chaîne est constituée de deux segments reliés par une articulation rotoïde, une extrémité de la chaîne étant attachée à la plate-forme mobile par une articulation

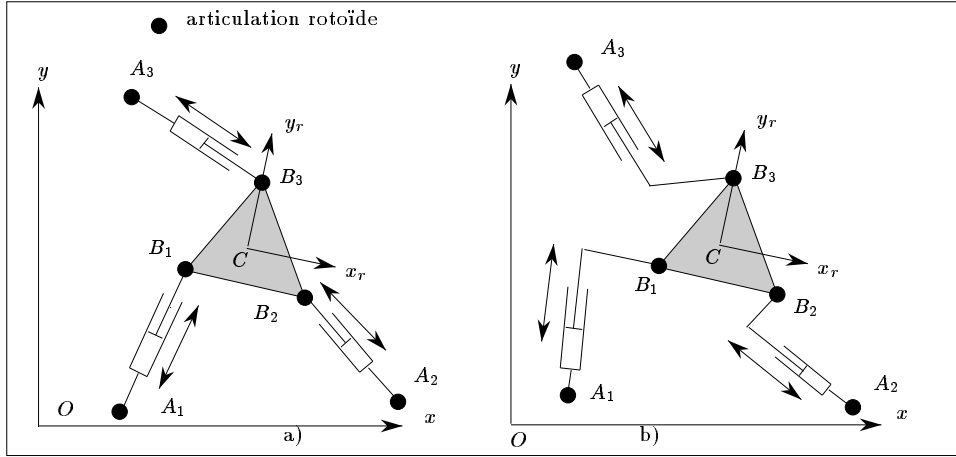


FIG. 1.1 - Robots plans de type 3 – RPR

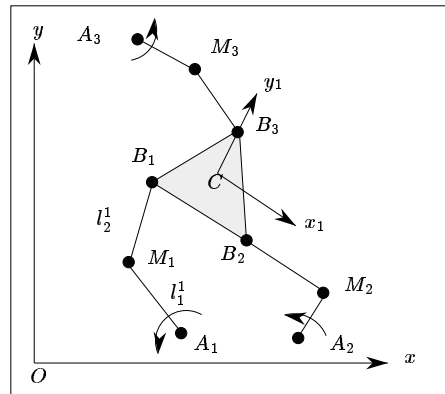


FIG. 1.2 - Robot plan de type 3 – RRR

rotoïde, l'autre étant connectée par une articulation rotoïde à un actionneur prismatique lié au sol (figure 1.3). Pour ce robot on notera l_2^i la longueur du

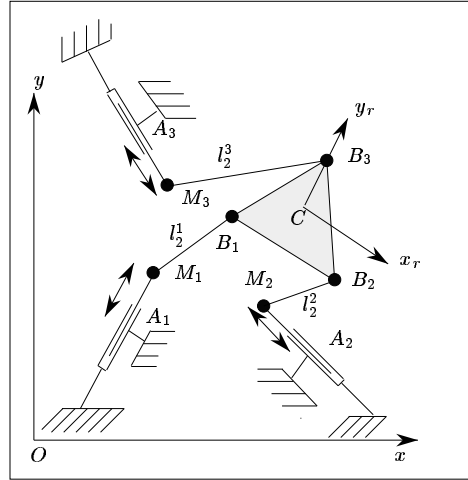


FIG. 1.3 - Robot plan de type 3 – PRR

segment $M_i B_i$.

1.1.2 Notations

On notera B_i les points d'attache des chaînes à la plate-forme et A_i le centre des articulations liées au sol. Pour les robots 3 – RPR, 3 – RRR on définit un repère de référence dont l'origine est arbitrairement placée au point A_1 et donc l'axe x est défini par la ligne $A_1 A_2$.

On choisit un point particulier C de la plate-forme mobile et les coordonnées de C dans le repère de référence seront utilisées pour définir la position de la plate-forme.

On attache un repère $C(x_r, y_r)$ à la plate-forme mobile et l'orientation du robot peut alors être définie, par exemple, par l'angle θ entre les axes x_r et x .

1.1.3 Contraintes sur l'espace de travail

L'espace atteignable par le point de référence de la plate-forme mobile se trouve contraint par deux types de facteur:

- le débattement limité des variables motorisées (par exemple la course d'un actionneur prismatique).
- le débattement limité des articulations passives (par exemple une articulation rotoïde qui ne permet pas une rotation complète).

Nous prendrons en compte ces contraintes pour calculer les déplacements possibles du point de référence.

Notons que pour les robots plans il est possible d'adopter une conception pour laquelle le problème des intersections entre segments ne se pose pas .

1.2 Espace à orientation fixe

Dans cette section on suppose que l'orientation de la plate-forme mobile est fixée et on veut déterminer l'ensemble des positions atteignables par le point de référence de la plate-forme.

1.2.1 Prise en compte des limites sur les variables articulaires

1.2.1.1 Cas du robot 3 – RPR

Le principe de calcul de la zone permise pour le robot de type 3 – RPR a été décrit par Gosselin [3] et Williams [19]. On suppose que les vérins ont une longueur minimum ρ_{min} et une longueur maximum ρ_{max} . En conséquence, les points B_i de la plate-forme doivent se trouver compris dans une zone annulaire dont la frontière extérieure est un cercle C_{e_i} de centre A_i et de rayon ρ_{max} et la frontière intérieure un cercle C_{i_i} de même centre et de rayon ρ_{min} . Nous noterons \mathcal{G}_i la couronne annulaire associée au segment i .

Lorsque le point B_i se déplace dans cette zone le point C , puisque l'orientation est constante, se déplace dans une zone identique \mathcal{W}_i dont les frontières

sont des cercles $\mathcal{C}_{e_i}, \mathcal{C}_{i_i}$ dont le centre S_i s'obtient par une translation de A_i de vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$ (figure 1.4). Si les contraintes sur le segment i sont satisfaites alors

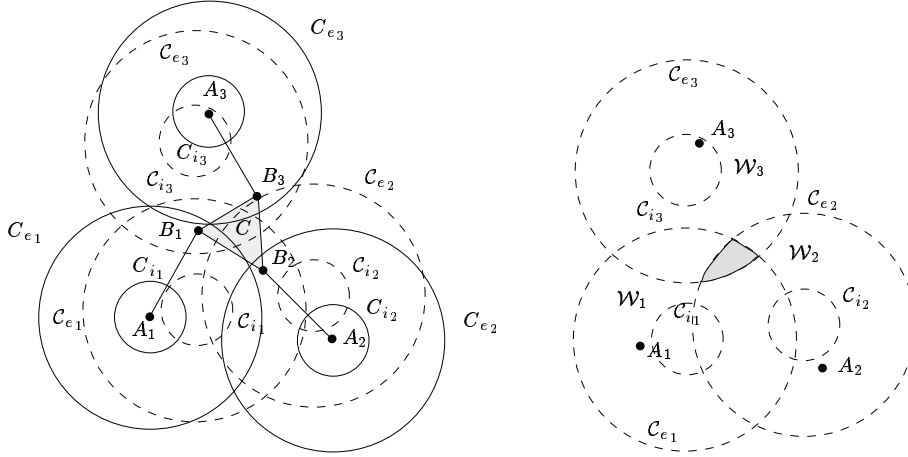


FIG. 1.4 - *A gauche on déduit des couronnes annulaires des B_i les couronnes annulaires devant contenir C par simple translation de vecteur \mathbf{CB}_i . A droite l'espace de travail (en grisé) est déduit de ces objets.*

C doit se trouver à l'intérieur de \mathcal{W}_i . L'espace de travail est obtenu lorsque les contraintes sur tous les segments sont satisfaites et sera donc l'intersection des trois zones $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$. On en déduit que la frontière de l'espace de travail sera constituée d'arcs de cercle (figure 1.4).

Pour trouver cette intersection et, par conséquent, les arcs de cercle, on procède de la manière suivante:

1. on calcule tout d'abord toutes les intersections entre tous les couples de cercle. On peut trouver 0, 1, ou 2 points d'intersection.
2. Pour un cercle donné on ordonne les points d'intersection, ce qui conduit à une liste d'arcs de cercle sur le cercle considéré. Si l'on n'a pas trouvé de point d'intersection la liste est réduite au cercle lui-même.
3. Pour tous les arcs de la liste d'un cercle donné on teste si l'arc est à l'intérieur des 3 couronnes annulaires. Pour cela il suffit de prendre un

point au hasard sur l'arc et de vérifier la condition ci-dessus. Il est facile en effet de montrer que si ce point satisfait la contrainte alors tout l'arc la satisfait aussi. Si l'arc vérifie la condition il fait partie de la frontière de l'espace de travail, s'il ne la vérifie pas il est rejeté et on passe à l'arc suivant dans la liste.

Le temps de calcul de ce type d'espace de travail sur une station de travail SUN 4-60 est de l'ordre de 4-5 ms.

1.2.1.2 Cas du robot 3 – RRR

Un robot plan de ce type est décrit en figure 1.2. Soit l_1^i la distance entre A_i et M_i , l_2^i la distance entre M_i et B_i . Le point B_i est alors clairement compris dans une couronne annulaire de centre A_i dont le cercle externe a comme rayon $l_1^i + l_2^i$ et dont le rayon du cercle interne vaut $|l_1^i - l_2^i|$. Comme dans le cas du robot 3 – RPR le point C doit être inclus dans une couronne annulaire obtenue à partir des couronnes annulaires des B_i par translation de vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$ et l'espace de travail du robot est l'intersection des 3 couronnes annulaires. L'algorithme est donc dans le principe identique au cas des robots de type 3 – RPR.

1.2.1.3 Cas du robot 3 – PRR

Un robot plan de ce type est décrit en figure 1.3. Soit $\rho_{max}^i, \rho_{min}^i$ les allongements maximum et minimum de l'actionneur prismatique et l_2^i la distance entre M_i et B_i . La région que peut occuper le point B_i est alors de deux types (figure 1.5):

- si $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i \geq 2l_2^i$ un rectangle de hauteur $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i$ et largeur $2l_2^i$, surmonté par deux demi-cercles de rayon l_2^i (à gauche sur la figure)
- si $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i < 2l_2^i$ la même zone moins l'intersection des deux cercles de rayon l_2^i centrés en $z = \rho_{max}^i, z = \rho_{min}^i$ (à droite sur la figure)

La zone atteignable par le point C est obtenue à partir des zones des B_i par translation de vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$. L'intersection des trois zones ainsi obtenues constitue l'espace de travail. L'algorithme permettant le calcul de cette intersection

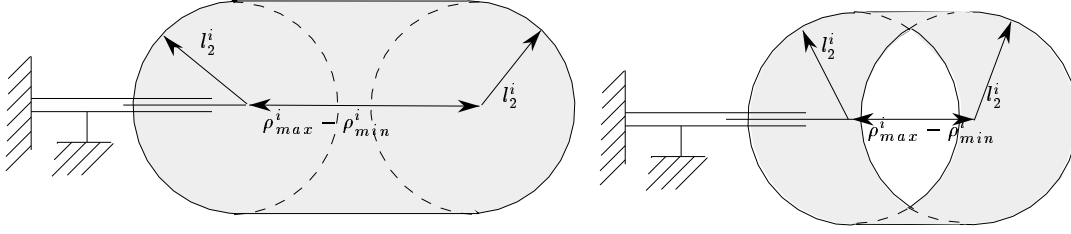


FIG. 1.5 - Les zones atteignables par le point B_i pour un robot de type 3-PRR (en grisé).

est un peu plus complexe que dans le cas des couronnes annulaires (puisque'il s'agit de calculer l'intersection de *polygones généralisés*) mais nous avons décrit dans un précédent rapport un algorithme possible [16].

1.2.2 Prise en compte des débattements mécaniques

Dans cette section on se restreint au cas des robots de type 3 - RPR et l'on va imposer qu'en plus des limites sur les variables articulaires les articulations de la base sont soumises à des limitations mécaniques qui réduisent leur possibilité de rotation. On peut donc supposer que les segments ne peuvent se déplacer que dans un secteur annulaire d'angle au centre α_i . Les zones permises \mathcal{W}_i ne sont donc pas les couronnes annulaires complètes mais des secteurs annulaires dont l'intersection est l'espace de travail. La frontière de l'espace de travail est donc constituée d'arcs de cercles et de segments (figure 1.6). On peut aussi imposer des contraintes sur les articulations de la plate-forme, du même type que pour les articulations de la base. Ainsi si la contrainte est respectée le point A_i doit se trouver à l'intérieur d'un secteur CO_i d'angle au centre β_i (qui définit la contrainte), de direction \mathbf{n}_i fixe dans le repère mobile et de sommet B_i . Considérons le secteur CO_{A_i} de direction parallèle à \mathbf{n}_i , d'angle au centre β_i et de sommet A_i . Il est facile de montrer que si A_i est dans le secteur CO_i alors B_i est dans le secteur CO_{A_i} et réciproquement. En conséquence, il est facile de prendre en compte les contraintes sur les articulations de la

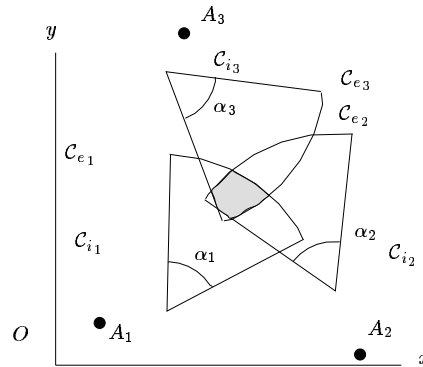


FIG. 1.6 - En grisé l'espace de travail d'un robot plan lorsque les contraintes sont les limitations articulaires et des contraintes sur les articulations de la base.

plate-forme en calculant les secteurs annulaires obtenus en prenant en compte à la fois les secteurs d'angle α_i et les secteurs CO_{A_i} . L'espace de travail est toujours l'intersection des secteurs annulaires.

1.2.3 Exemples

On considère dans ce rapport les robots plans dont les dimensions sont définies sur la figure 1.7 et dont les valeurs numériques sont présentées dans le tableau 1.1.

Robot	l_1	l_2	l_3	c_2	c_3	d_3	θ
1	25	25	25	20	0	10	60
2	20.839	17.045	16.54	15.91	0	10	52.74
3	25	25	25	20	10	17.32	60
4	2	2	2	10	5	8.66	60

TAB. 1.1 - Dimensions des robots pris comme exemples (angles en degré).

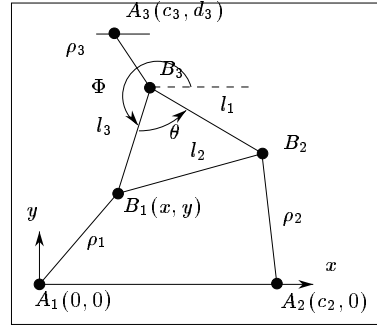


FIG. 1.7 - Notations pour les robots plans

Les figures 1.8,1.9,1.10,1.11 présentent pour ces robots l'espace atteignable par le point B_3 pour diverses orientations, englobé dans l'espace maximal dont nous présenterons le principe du calcul dans la section suivante. L'orientation du robot est définie par l'angle Φ entre l'axe x et la ligne passant par B_3, B_1 .

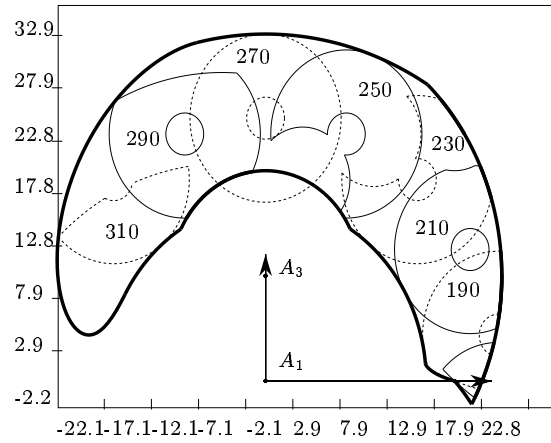


FIG. 1.8 - Espace maximal et différents espaces de travail à orientation fixée pour le robot 1 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$).

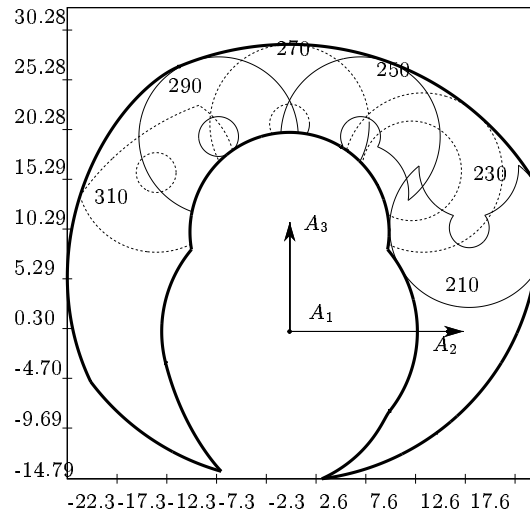


FIG. 1.9 - Espace maximal et différents espaces de travail à orientation fixée pour le robot 2 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$).

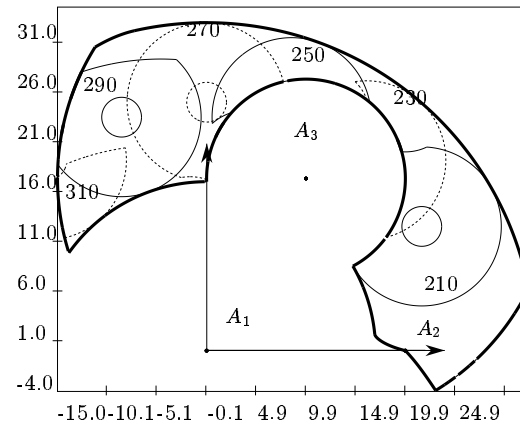


FIG. 1.10 - Espace maximal et différents espaces de travail à orientation fixée pour le robot 3 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$).

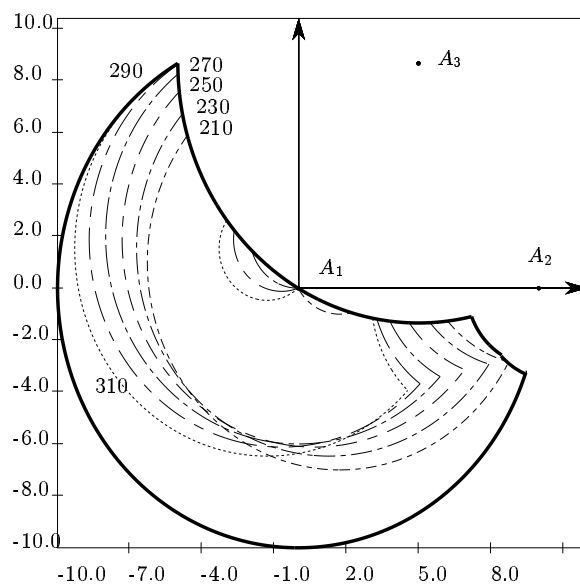


FIG. 1.11 - *Espace maximal et différents espaces de travail à orientation fixée pour le robot 4 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$).*

1.3 Espace maximal

L'espace maximal est défini comme l'ensemble des positions du point C atteignables avec au moins une orientation de la plate-forme. L'existence de cette région est due au fait que les actionneurs prismatiques des chaînes ont une course limitée. On notera $\rho_{max}^i, \rho_{min}^i$ les longueurs maximum et minimum de l'actionneur prismatique de la chaîne i .

Le problème de la détermination de l'espace maximal a été abordé par Kassner [9] qui a remarqué que la frontière de cet espace était constituée d'arcs de cercle ou de sextique mais les calcule par une méthode de discrétisation. La même remarque sur la nature de la frontière de l'espace de travail a été faite incidemment par Kumar[10] sans que cet auteur expose de méthodes pour ce calcul. Son approche consiste plutôt à montrer l'existence de conditions nécessaires sur les visseurs associés aux mouvements du robot pour qu'une position du point de référence soit sur la frontière de l'espace maximal. Toutefois la méthode ne s'applique pas aux actionneurs prismatiques et la prise en compte des butées mécaniques est difficile à introduire dans cette théorie.

Notre but est donc de déterminer de manière géométrique et exacte la frontière de l'espace maximal.

1.3.1 Tester si un point est dans l'espace maximal

1.3.1.1 Cas des robots 3 – RPR et 3 – RRR

Un test important dans notre algorithme va consister à déterminer si une position donnée du point de référence de la plate-forme mobile est ou non dans l'espace maximal et éventuellement de déterminer les orientations permises en ce point.

Pour répondre à cette question il s'agit de déterminer si au moins une orientation de l'organe terminal est possible pour une position du point C . Pour la position de C que l'on examine le point B_1 peut se déplacer sur le cercle C_1 de centre C et de rayon $\|\mathbf{CB}_1\|$. On calcule alors l'intersection de C_1 avec la couronne annulaire correspondant aux contraintes sur la longueur du segment 1 qui est composée de deux cercles C_{max}^1, C_{min}^1 tous deux centrés en A_1 et de rayon $\rho_{max}^1, \rho_{min}^1$ (figure 1.12).

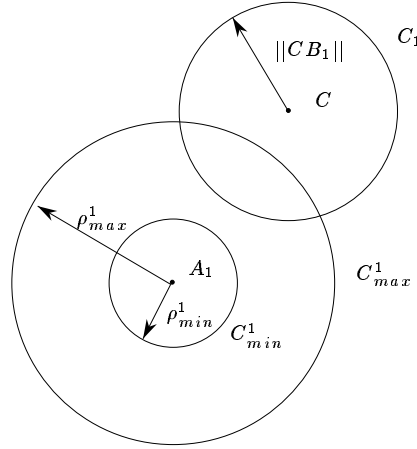


FIG. 1.12 - Pour un point C fixé le point B_1 se déplace sur un cercle C_1 . Les orientations permises pour la plate-forme correspondent au secteur défini par les points d'intersection entre le cercle C_1 et la couronne annulaire \mathcal{G}_1 .

Si il n'y a pas de point d'intersection, on examine si le cercle C_1 est à l'intérieur de C_{max}^1 et à l'extérieur de C_{min}^1 en testant l'appartenance d'un point quelconque du cercle C_1 à l'intérieur de C_{max}^1 et à l'extérieur de C_{min}^1 . Si tel est le cas, toutes les orientations autour de C sont permises pour le plateau mobile du point de vue des contraintes sur le segment 1. Si C_1 est à l'extérieur de C_{max}^1 ou à l'intérieur de C_{min}^1 alors aucune orientation n'est permise et C n'appartient pas à l'espace maximal. On procède de la même manière avec les segments 2 et 3.

Supposons maintenant qu'au moins un des C_1, C_2, C_3 a une intersection avec la couronne annulaire du segment associée. A chacun des points d'intersection correspond un angle de rotation de la plate-forme mobile et l'on ordonne ces angles dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour obtenir des intervalles I_n^i (figure 1.13).

Pour chacun des intervalles on considère l'angle de rotation correspondant au milieu de l'intervalle et l'on examine les longueurs des segments pour cette configuration particulière du robot. Si les longueurs sont dans les gammes permises pour les trois segments alors l'intervalle considéré définit un intervalle

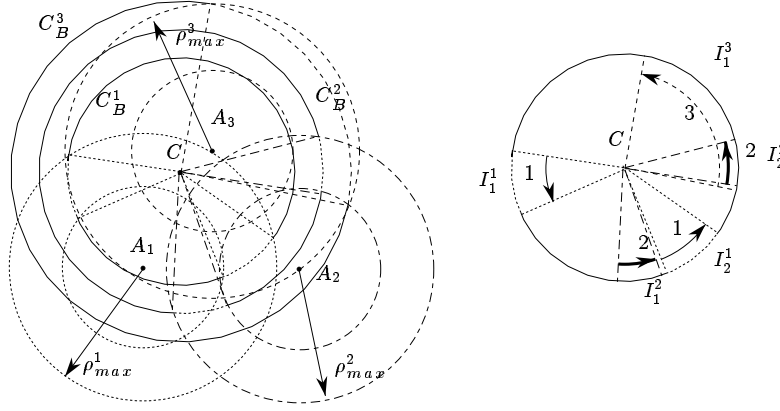


FIG. 1.13 - Pour une position fixée de C les zones atteignables par les B_i définissent 3 listes d'intervalles permis pour l'angles de rotation. Si C est dans l'espace maximal ces listes doivent avoir une intersection non vide. Ici on voit à droite que l'intersection est vide car I_1^3 n'a pas d'intersection avec I_1^1 ou I_1^2 .

valide de l'angle de rotation. On examine l'ensemble des intervalles et le point C sera dans l'espace maximal si l'on a trouvé au moins un intervalle valide. Notons que cette procédure permet de déterminer non seulement si le point est dans l'espace maximal mais aussi les valeurs permises des angles de rotation.

Pour ce qui concerne les robots de type 3 – RRR nous avons vu que les contraintes sur les points B_i se résument à l'appartenance à une couronne annulaire. En conséquence l'algorithme décrit précédemment s'applique.

1.3.1.2 Cas du robot 3 – PRR

Nous avons déterminé dans la section 1.2.1.3 la limite de la zone d'évolution des points B_i . On calcule l'intersection de ces trois zones avec les cercles C_1, C_2, C_3 . A l'aide de ces intersections on détermine trois listes d'intervalles de l'angle d'orientation permis pour lesquelles les contraintes associées à chaque segment sont respectées. Si ces listes ont une intersection le point C fait partie de l'espace de travail (figure 1.14).

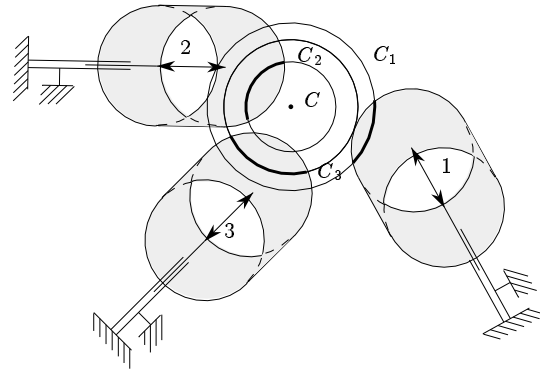


FIG. 1.14 - Pour une position du point C les orientations permises vis-à-vis du segment i sont calculées à partir de l'intersection du cercle C_i (centre C , rayon $\|CB_i\|$). On obtient trois listes d'intervalles qui doivent avoir une intersection si C fait partie de l'espace maximal (dans le cas de la figure C n'appartient pas à l'espace maximal).

1.3.2 Détermination de l'espace maximal pour un B_i , cas du robot 3 – RPR

Notre but est de déterminer la frontière de l'espace maximal lorsque l'on choisit comme point de référence du plateau mobile l'un des B_i , par exemple B_3 .

Remarquons tout d'abord que si une position du point B_3 est sur cette frontière alors au moins un des segments a une longueur correspondant à un extrémum de sa gamme permise, c'est-à-dire que le segment est en butée. En effet, supposons que le robot soit dans une position appartenant à la frontière de l'espace maximal dans une orientation telle qu'aucun des segments ne soit en butée. Il est alors toujours possible de déplacer le robot dans n'importe quelle direction en conservant son orientation et en conséquence le point C n'est pas sur la frontière de l'espace maximal.

On peut alors distinguer différents cas selon le nombre de segments en butée.

1.3.2.1 Éléments de la frontière pour un segment en butée

Considérons la chaîne $A_i B_i B_3$ comme un robot série plan à deux degrés de liberté. En général, dans une configuration donnée de ce robot il va exister autour de la position courante de B_3 une zone circulaire qui sera atteignable sauf si cette chaîne est en configuration singulière, c'est-à-dire si A_i, B_i, B_3 sont alignés. En conséquence, les positions de B_3 appartenant à la frontière de l'espace maximal quand un segment est en butée seront seulement obtenues quand cet alignement est respecté.

On considère par exemple le cas du segment 1. Deux types d'alignements sont possibles, celui où l'on trouve dans l'ordre les points $A_1 B_1 B_3$ et celui où l'on trouve $A_1 B_3 B_1$ (ou $B_3 A_1 B_1$) comme le montre la figure 1.15. Le point B_3

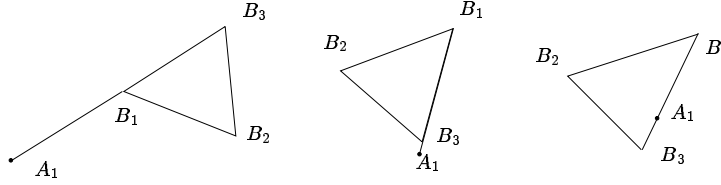


FIG. 1.15 - Si une partie de la frontière de l'espace maximal est telle qu'un seul segment i est en butée alors les points A_i, B_i, B_3 sont alignés.

décrit alors un cercle C_{B_3} .

Lorsque le point B_3 décrit le cercle C_{B_3} , dans le même temps les points B_1, B_2 décrivent eux aussi des cercles C_{B_1}, C_{B_2} et l'on doit conserver les parties de C_{B_3} telles que les positions correspondantes de B_1, B_2, B_3 soient toutes à l'intérieur des couronnes annulaires $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ (figure 1.16).

Pour calculer les zones permises notons θ l'angle de rotation du segment 1 autour de A_1 . Pour chacun des points B_1, B_2, B_3 on obtient la liste I^i des intervalles de θ pour lesquels la position du point B_i est valide en calculant les intersections du cercle C_{B_i} avec la couronne annulaire \mathcal{G}_i . On calcule ensuite l'intersection des listes I^1, I^2, I^3 : on obtient ainsi une liste d'intervalles définissant des arcs sur C_{B_3} correspondant à des positions valides de B_1, B_2, B_3 . Ces arcs sont des candidats potentiels pour la frontière de l'espace maximal.

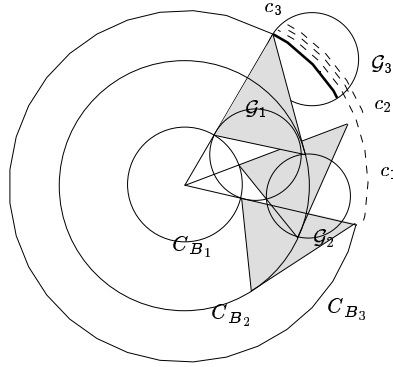


FIG. 1.16 - Les points A_1, B_1, B_3 sont alignés: B_1, B_2, B_3 décrivent des cercles $C_{B_1}, C_{B_2}, C_{B_3}$. Seules les composantes du cercle C_{B_3} telles que tous les B_i soient dans leur couronne annulaire \mathcal{G}_i peuvent faire partie de la frontière de l'espace maximal. Les parties de C_{B_3} permises pour le point B_i sont pointillées et notées c_i . La partie où toutes les contraintes sont satisfaites est en trait épais.

Différents cas d'alignements sont possibles et pour certains d'entre eux si l'arc correspondant existe alors il fera partie de la frontière de l'espace maximal car dans chacun des cas il existe une direction dans laquelle tout déplacement est interdit. Ces cas sont les suivants:

1. 1 en extension maximum, $A_1 B_1 B_3$ alignés dans cet ordre
2. 2 en extension maximum, $A_2 B_2 B_3$ alignés dans cet ordre
3. 1 en extension minimum, $B_3 A_1 B_1$ alignés dans cet ordre
4. 2 en extension minimum, $B_3 A_2 B_2$ alignés dans cet ordre
5. 1 en extension minimum, $A_1 B_3 B_1$ alignés dans cet ordre
6. 2 en extension minimum, $A_2 B_3 B_2$ alignés dans cet ordre
7. 1 en extension maximum, $B_3 A_1 B_1$ alignés dans cet ordre
8. 2 en extension maximum, $B_3 A_2 B_2$ alignés dans cet ordre

Les arcs obtenus après examen de ces différents cas sont stockés dans une structure appropriée et nous les appellerons les *arcs de la phase 1*.

1.3.2.2 Éléments de la frontière pour deux segments en butée

On peut maintenant s'intéresser au cas où une partie de la frontière de l'espace maximal est obtenue lorsque deux segments sont en butée. Lorsque les deux segments 1 et 2 ont une longueur fixe, la trajectoire du point B_3 est la courbe de coupleur d'un mécanisme à 4 barres (figure 1.17). Ce type de mécanisme a été particulièrement bien étudié [1],[5],[6] et il est connu que la courbe de coupleur est une sextique. Quatre sextiques vont jouer un rôle

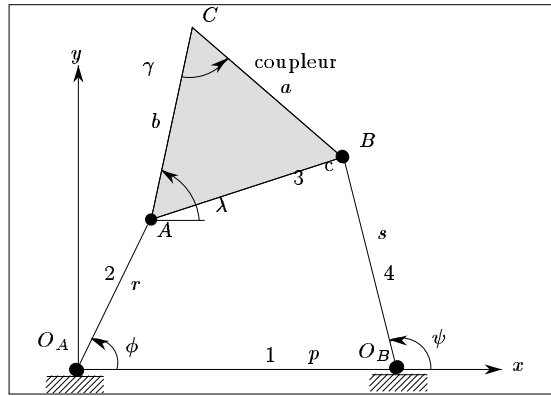


FIG. 1.17 - Le mécanisme à 4 barres.

important, ce sont les courbes de coupleur des mécanismes à 4 barres pour lesquels les longueurs r, s correspondent aux différentes combinaisons possibles pour les longueurs des segments 1 et 2: $(\rho_{max}^1, \rho_{max}^2)$, $(\rho_{max}^1, \rho_{min}^2)$, $(\rho_{min}^1, \rho_{min}^2)$, $(\rho_{min}^1, \rho_{max}^2)$.

1.3.2.2.1 Points critiques Certains points particuliers, les *points critiques*, vont délimiter les portions de sextiques et les portions d'arcs de la phase 1 qui vont intervenir dans le calcul de l'espace maximal.

Le premier type de points critiques sera les points d'intersection de la sextique avec la couronne annulaire \mathcal{G}_3 associée au segment 3. Pour déterminer ces points remarquons qu'ils correspondent aux configurations du plateau pour lesquelles les trois longueurs de segments sont fixées. Le problème de la détermination des positions possibles du plateau mobile pour trois longueurs de segment fixées (problème dit du *modèle géométrique direct*) est bien connu [15]. Nous savons déterminer la position de ces points et nous savons qu'il en existe au plus 6. Les points critiques ainsi déterminés sont stockés dans une structure de données associée aux cercles C_{min}^3, C_{max}^3 constituant la couronne annulaire.

Un second type de points critiques pour les sextiques sera les points d'intersection de la sextique avec les arcs de la phase 1. Là aussi ces arcs définissent une position du point A_3 (le centre de l'arc) ainsi qu'une longueur du segment 3 (le rayon de l'arc). Les intersections éventuelles correspondent donc une à configuration du modèle géométrique direct d'un robot. On calcule alors les solutions et l'on détermine celles qui appartiennent aux arcs. Notons que ces solutions seront des points critiques pour les arcs.

Un troisième type de points critiques pour les sextiques sera les points multiples de la sextique. La détermination de la position des points multiples de ce type de sextique est un problème connu (voir par exemple Hunt [6]) et l'on sait qu'il existe en général au plus 4 points doubles et pas de points triples.

Le quatrième type de points critiques sera les positions limites de la sextique, c'est-à-dire les positions correspondant à des valeurs limites de l'angle ϕ . En effet pour certains mécanismes à 4 barres l'angle ϕ ne peut varier dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ entier (ce sont les cas où la somme des longueurs $c + s$ est inférieure à $p + r$).

Enfin le dernier type de points critiques va être celui correspondant à l'intersection des sextiques entre elles. L'intersection de deux courbes de coupleur de deux mécanismes à 4 barres est un problème difficile et ce n'est que récemment qu'Innocenti [8] a proposé une solution. On peut facilement démontrer qu'il ne peut y avoir plus de 18 points d'intersection réels et dans la méthode d'Innocenti ces positions sont obtenues en résolvant un polynôme mono-variable de degré 18. Notons cependant que dans notre cas les mécanismes à quatre barres ont la propriété d'avoir le même coupleur ainsi que les mêmes points d'articulation. On peut montrer qu'alors il existe au plus 12 points d'intersec-

tion. La procédure proposée par Innocenti s’est révélée délicate à implanter, peu robuste et coûteuse en temps de calcul et nous avons préféré une solution purement numérique.

1.3.2.3 Détermination des portions de sextiques appartenant à la frontière

Après avoir déterminé l’ensemble des points critiques il faut calculer les portions de sextiques qu’ils délimitent. Ce problème est compliqué par le fait que la courbe de coupleur peut être unicursale ou bicursale.

Pour résoudre ce problème on va tout d’abord calculer pour chacun des points critiques T_i le couple unique d’angles ϕ_i, ψ_i correspondant à cette position du mécanisme. D’autre part, pour un angle donné ϕ nous savons qu’il existe deux valeurs possibles pour l’angle ψ obtenues par la résolution d’une équation du second degré. Il existe donc deux expressions possibles pour déterminer ψ .

Le type d’expression conduisant aux angles ψ_i permet de trier les points critiques. On obtient deux ensembles de points critiques dont les éléments appartiennent soit à une des deux composantes de la sextique si elle est bicursale ou à des branches distinctes si elle est unicursale. On ordonne ensuite chacun des sous-ensembles selon une valeur croissante des angles ϕ_i correspondant aux points critiques. On obtient ainsi un découpage de la sextique en portions successives dont certaines vont être un élément de la frontière de l’espace maximal (figure 1.18).

Une portion définissant un élément de la frontière sera telle que pour n’importe quel point de la portion un déplacement selon une des normales à la sextique en ce point conduira à une violation des contraintes alors qu’un déplacement selon l’autre normale sera valide. Tout autre combinaison implique que la portion ne fait pas partie de la frontière.

Pour procéder à ce test il suffit de calculer l’inverse jacobienne cinématique du robot en un point quelconque de la portion, les normales unitaires $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ à la sextique en ce point et de calculer les vitesses articulaires correspondant à des vitesses dirigées selon $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$. Les signes des vitesses obtenues permettent de conclure sur la nature valide des déplacements selon la normale. Ainsi pour une sextique correspondant à une valeur maximum de ρ_1, ρ_2 si les vitesses

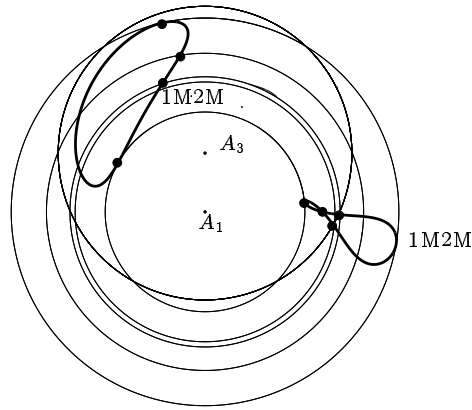


FIG. 1.18 - Les sextiques décrites par B_3 (en trait épais) sont découpées en portions comprises entre deux points critiques. Certaines de ces portions vont être des éléments de la frontière de l'espace maximal.

articulaires $\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2$ sont toutes les deux positives pour la normale \mathbf{N}_1 (donc négative pour \mathbf{N}_2) alors la portion de sextique fait partie de la frontière.

On peut maintenant procéder à la détermination des éléments de la frontière qui sont des arcs des cercles. Dans un premier temps on considère les arcs de la phase 1 pour lesquels on a éventuellement déterminé des points critiques (les intersections avec les sextiques, les autres points critiques étant les extrémités des arcs). On considère pour chaque arc tout sous-arc compris entre deux points critiques, on prend un point quelconque sur l'arc, on calcule les normales en ce point à l'arc. Il suffit maintenant de procéder au même type de test que pour les portions de sextique pour savoir si l'arc fait partie de la frontière de l'espace maximal.

A ce stade on dispose de la frontière de l'espace maximal pour le point de référence B_3 sous la forme d'une liste de portions de sextique et d'arcs de cercle. La figure 1.19 présente les différentes primitives géométriques intervenant dans un exemple typique de calcul d'espace maximal.

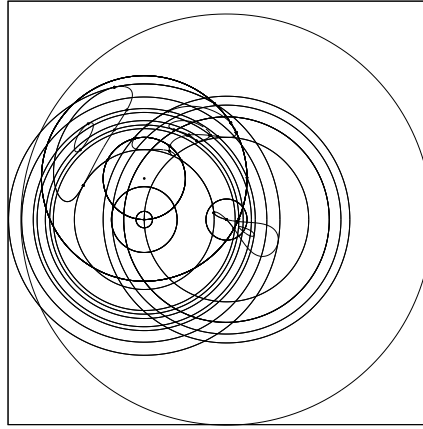


FIG. 1.19 - *Exemple de primitives géométriques intervenant dans le calcul de l'espace maximal.*

1.3.2.4 Exception

Nous avons vu que dans le cas général il existe pour un mécanisme à 4 barres au plus deux angles ψ pour un angle ϕ donné. Il existe cependant une exception lorsque $p = r$, $\phi = 0$, $c = s$. En effet dans ce cas ψ peut varier librement dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ et le point B_3 décrit un cercle centré en A_2 . Dans ce cas il faudra procéder au tri des portions de sextique selon l'angle ψ et non l'angle ϕ .

1.3.2.5 Tri des arcs internes et séparation en portions atteignables

Remarquons tout d'abord que les arcs de cercle restant après le traitement des points critiques sont nécessairement des éléments de la frontière de l'espace maximal.

Nous avons trouvé les arcs de sextique qui constituent une partie de la frontière de l'espace maximal mais dans certains cas des arcs de sextique ont été éliminés car étant internes à l'espace maximal. Certains de ces arcs de sextique vont présenter une caractéristique intéressante. A cet effet, il faut examiner le nombre d'intervalles d'orientation permis de part et d'autre de

la sextique. Si ces nombres sont différents on examine le comportement des intervalles autour de l'arc de sextique (il suffit pour cela d'examiner ce qui se passe en un point particulier de l'arc en prenant deux points proches placés sur les normales à l'arc). Il peut se produire qu'un intervalle présent d'un côté de la sextique disparaisse de l'autre côté. Si l'arc de sextique sépare l'espace maximal en deux composantes *et que le montage initial du manipulateur a été fait avec une orientation dans l'intervalle qui disparaît lors du passage de la sextique* alors la composante de l'espace maximal qui admet l'arc de sextique comme frontière sera en fait l'espace maximal pour ce montage initial. La figure 1.20 présente un exemple de séparation.

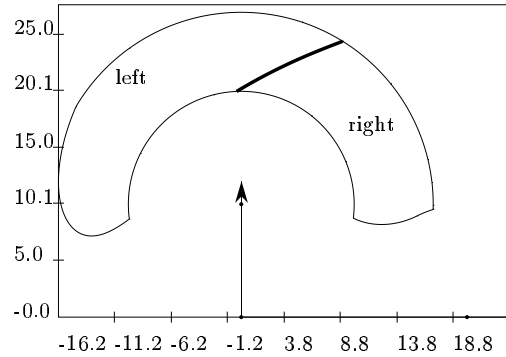


FIG. 1.20 - . L'espace maximal calculé n'est pas forcément l'espace maximal atteignable quelque soit le montage initial. Ici si l'on monte le robot dans la configuration B_3 ($7, 20$), $\theta = 270^\circ$ l'espace maximal sera la partie droite de l'espace maximal total. Par contre pour $\theta = 225^\circ$ l'espace maximal sera l'espace maximal total (robot 1, $\rho_1 \in [8, 12]$, $\rho_2 \in [5, 15]$, $\rho_3 \in [10, 17]$).

1.3.2.6 Temps de calcul

Le temps de calcul de l'espace maximal est extrêmement dépendant du résultat et se situe sur un SUN 4-60 entre 1500 et 15000 ms. La partie la plus pénalisante est le calcul des intersections entre sextiques.

1.3.2.7 Exemples

Les figures 1.21, 1.22, 1.23 présentent des calculs d'espace maximal pour les robots considérés dans ce rapport.

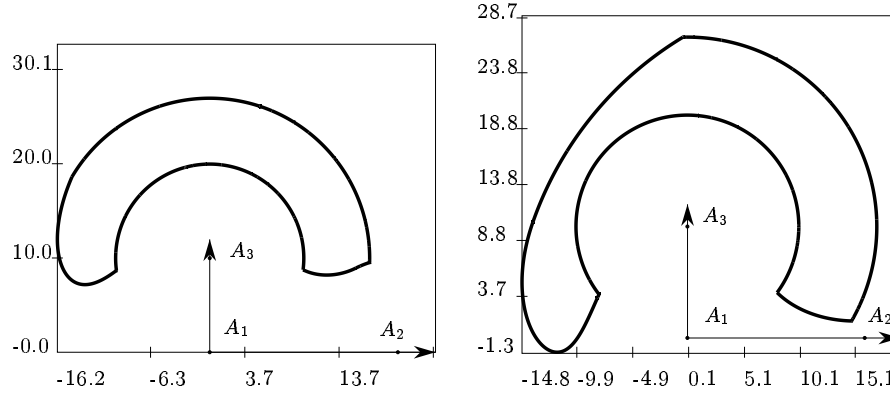


FIG. 1.21 - *A gauche espace de travail maximal pour le robot 1, $\rho_1 \in [8, 12]$, $\rho_2 \in [5, 15]$, $\rho_3 \in [10, 17]$ (temps de calcul: 4216ms). A droite espace de travail pour le robot 2, $\rho_1 \in [8, 12]$, $\rho_2 \in [5, 15]$, $\rho_3 \in [10, 17]$ (temps de calcul: 5699ms).*

1.3.2.8 Espace maximal pour un point quelconque

Il est évidemment intéressant de pouvoir calculer l'espace maximal pour une position quelconque du point de référence sur le plateau mobile. Prendre comme point de référence un point quelconque du plateau mobile ne va pas modifier le principe de l'algorithme mais seulement en augmenter la complexité. En effet aux 8 cercles de type C_1, C_2 il faudra rajouter quatre autres de centre A_3 correspondant aux cas où le segment 3 est en butée et les points A_3, B_3, C sont alignés. De même, pour les sextiques au lieu d'avoir à considérer les quatre sextiques obtenues à partir des valeurs extrêmes des longueurs des segments 1 et 2 il conviendra d'en considérer douze correspondant aux mécanismes à quatre barres construits avec les valeurs extrêmes des longueurs des segments 1, 2, 3.

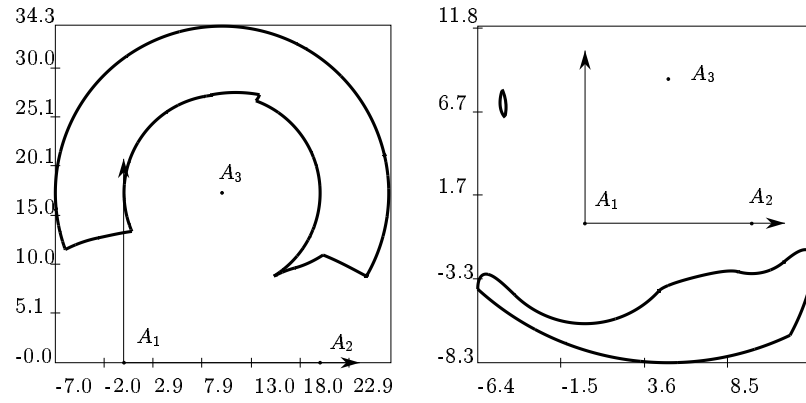


FIG. 1.22 - *A gauche espace de travail maximal pour le robot 3, $\rho_1 \in [8, 12]$, $\rho_2 \in [5, 15]$, $\rho_3 \in [10, 17]$ (temps de calcul: 14016ms). A droite espace de travail pour le robot 4, $\rho_1 \in [8, 12]$, $\rho_2 \in [5, 15]$, $\rho_3 \in [10, 17]$ (temps de calcul: 1983ms).*

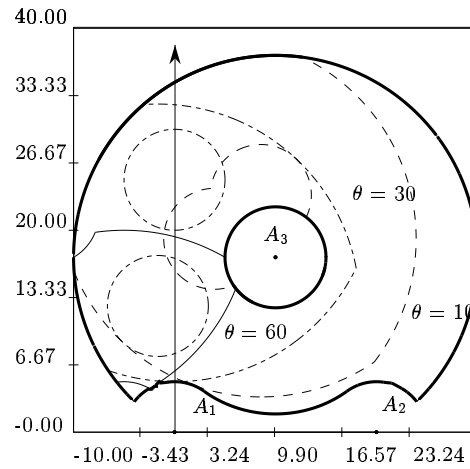


FIG. 1.23 - *En trait épais espace de travail maximal pour le robot 3, $\rho_1 \in [5, 20]$, $\rho_2 \in [5, 20]$, $\rho_3 \in [5, 20]$. En pointillés espace de travail pour différentes orientations*

1.3.3 Cas du robot 3 – *RRR*

La détermination de l'espace maximal pour ce type de robot est du même type que pour les robots de type 3 – *RPR*. Nous choisissons comme dans la section précédente le point B_3 comme point de référence de la plate-forme mobile. Du point de vue des contraintes sur le segment 3, le point B_3 doit être dans la couronne annulaire de centre A_3 dont le cercle externe a comme rayon $l_1^3 + l_2^3$ et le cercle interne a comme rayon $|l_1^3 - l_2^3|$. Du point de vue des contraintes sur les segments 1 et 2 la zone maximale atteignable par le point B_3 est obtenue en alignant les points A_i, M_i, B_i, B_3 . En conséquence cette zone est une couronne annulaire de centre A_i , dont le cercle externe a comme rayon $l_1^i + l_2^i + l_{i3}$ où l_{i3} est la distance entre le point B_i et le point B_3 . Le cercle interne n'existera que si $l_2^i + l_{i3} < l_1^i$ et son rayon sera $l_1^i - l_2^i - l_{i3}$. Enfin on obtiendra des arcs de sextique en considérant que les segments 1, 2 sont à leur allongement extréma c'est-à-dire pour les valeurs $l_1^j + l_2^j, |l_1^j - l_2^j|$. On peut donc appliquer directement l'algorithme présenté pour les robots de type 3 – *RPR*.

1.3.4 Cas du robot 3 – *PRR*

Un point de la frontière de l'espace maximal est toujours obtenu lorsque l'un au moins des segments est en butée.

Dans ce cas la procédure est sensiblement identique au cas des robots de type 3 – *RPR*.

Si un actionneur prismatique du segment i est en butée, le point B_3 se trouvera sur la frontière de l'espace maximal si les points M_i, B_i, B_3 sont alignés. Le point B_3 décrit un cercle centré en M_i (figure 1.24) et l'on retrouve donc les arcs de cercles de la phase 1.

Si deux actionneurs prismatiques sont en butée le point B_3 décrit la sextique que l'on obtient à partir d'un mécanisme à 4 barres dont les points d'articulation sont les points M_1, M_2 . Notons cependant que dans ce cas on doit procéder à l'intersection de courbes de coupleurs de mécanismes à 4 barres qui ont le même coupleur, les mêmes longueurs de segments mais qui diffèrent par la position de leurs points d'articulation lié au sol. On voit que l'on retrouve exactement les mêmes éléments géométriques que pour les robots de type 3 – *RPR*: le même type d'algorithme s'applique.

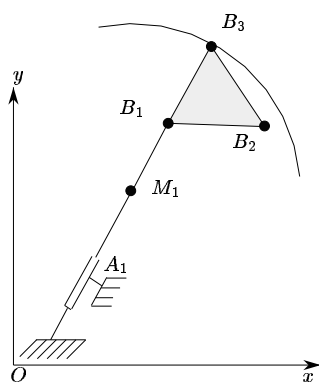


FIG. 1.24 - Élément possible de la frontière de l'espace maximal d'un robot de type 3 – PRR. L'actionneur prismatique est en butée et les points M_i , B_i , B_3 sont alignés. Le point B_3 décrit alors un cercle centré en M_i .

1.4 Espace maximal à orientation inclusive

1.4.1 Cas du robot 3 – RPR

Il peut être aussi intéressant de calculer l'ensemble des positions du point de référence atteignables par le robot avec au moins une orientation dans un intervalle donné, que nous appellerons l'intervalle d'orientation. On appellera cet espace de travail l'espace maximal à orientation inclusive (EMOI). L'espace de travail maximal que nous avons présenté dans la section précédente n'est qu'un cas particulier d'EMOI avec $[0, 2\pi]$ comme intervalle d'orientation. Nous supposons dans la suite que l'orientation de la plate-forme mobile est définie par l'angle entre l'axe x du repère de référence et la ligne B_3B_1 .

Là aussi nous choisissons comme point de référence le point B_3 . Dans le principe l'algorithme permettant de calculer cet espace de travail va être sensiblement similaire à celui que nous avons exposé précédemment. Remarquons qu'il est très facile de déterminer si une position est dans cet espace puisque l'on sait calculer en chaque point les intervalles d'orientation possibles. Il suffit donc de tester si l'intersection de ces intervalles avec l'intervalle d'orientation est non vide. Le raisonnement utilisé dans la section précédente pour démontrer qu'un point sur la frontière sera dans une orientation telle qu'au moins un de ces segments est en butée reste valide.

Dans un premier temps on va considérer les cercles décrits par le point B_3 lorsque les points A_i, B_i, B_3 sont alignés. Notons que pour chaque position de B_3 sur ces cercles l'orientation du plateau mobile est fixée. On déduit de ces cercles les arcs valides qui sont tels que :

- les positions correspondantes des points B_1, B_2, B_3 sont dans les couronnes annulaires $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ (nous les avons calculées dans la section précédente)
- l'orientation du plateau mobile est dans l'intervalle d'orientation

Le principe d'obtention de ces arcs est identique à celui décrit dans la section précédente, on rajoute simplement dans les listes I^i les angles θ où l'orientation de la plate-forme mobile correspond à l'une des bornes de l'intervalle d'orientation.

Pour ce qui concerne les sextiques on rajoutera comme points critiques les positions de B_3 où l'orientation du plateau mobile est égale à l'une des bornes de l'intervalle d'orientation.

A ce stade on dispose d'une liste d'arcs de cercle et de sextique dont certains éléments définissent la frontière de l'espace maximal. Pour déterminer ces éléments on procède de la manière suivante : on calcule pour un point X quelconque de l'élément les normales unitaires $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ à la courbe en ce point et l'on détermine les coordonnées des points $X_1 = X + \epsilon \mathbf{N}_1$, $X_2 = X + \epsilon \mathbf{N}_2$ où ϵ est une valeur arbitrairement petite. On teste alors l'appartenance des points X_1, X_2 à l'espace de travail. L'élément fera partie de la frontière de l'espace de travail si un point appartient à l'espace de travail et l'autre non.

Typiquement, le temps de calcul d'un tel espace est de l'ordre de 1000 à 2000 ms. Les figures 1.25, 1.26, 1.27, 1.28 présentent des espaces maximaux à orientation inclusive calculés pour divers intervalles d'orientation.

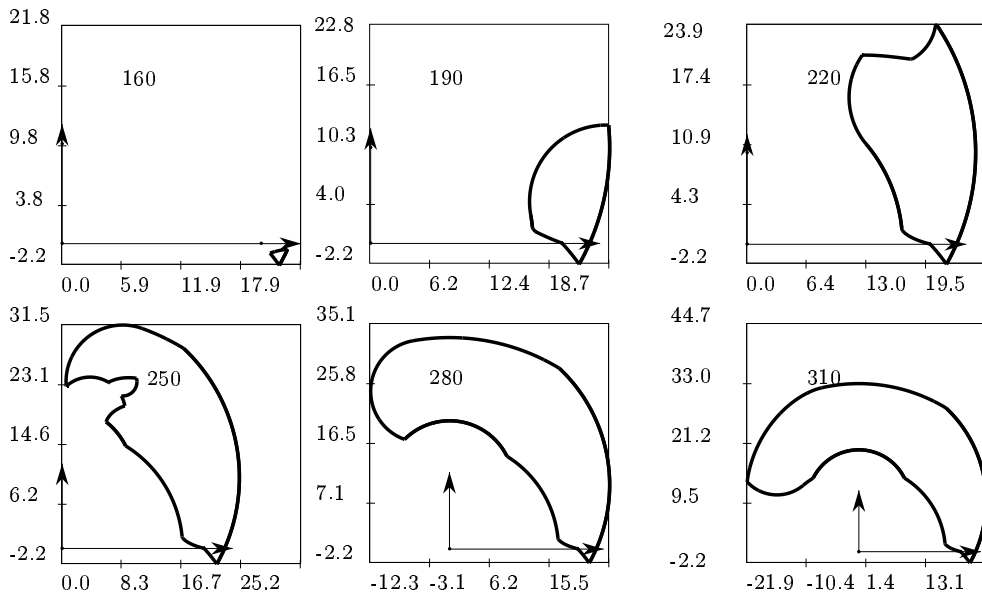


FIG. 1.25 - EMOI pour le robot 1 et pour différents intervalles d'orientation $\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$ (les intervalles commencent à 0).

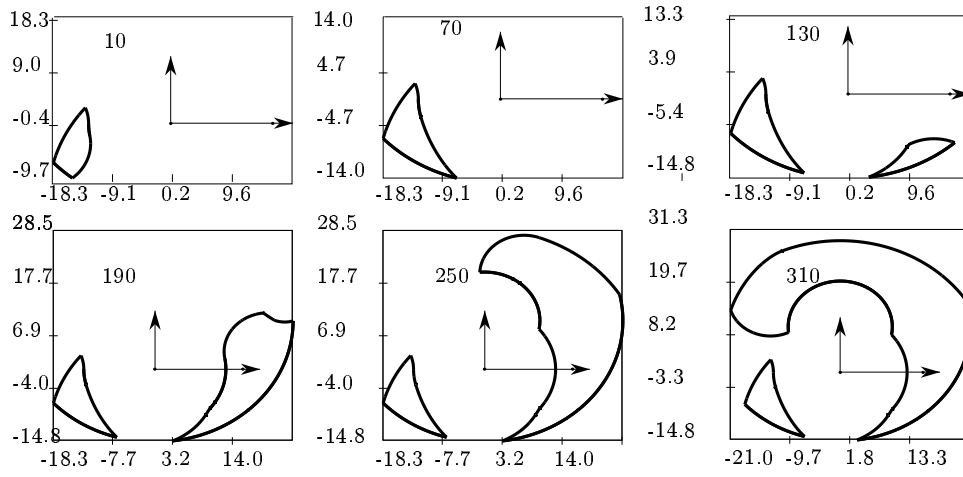


FIG. 1.26 - *EMOI pour le robot 2 et pour différents intervalles d'orientation $\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$ (les intervalles commencent à 0).*

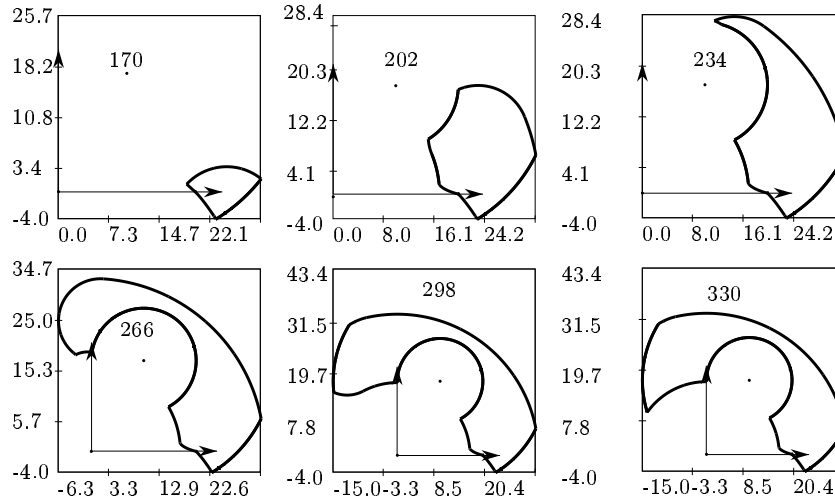


FIG. 1.27 - *EMOI pour le robot 3 et pour différents intervalles d'orientation $\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$ (les intervalles commencent à 0).*

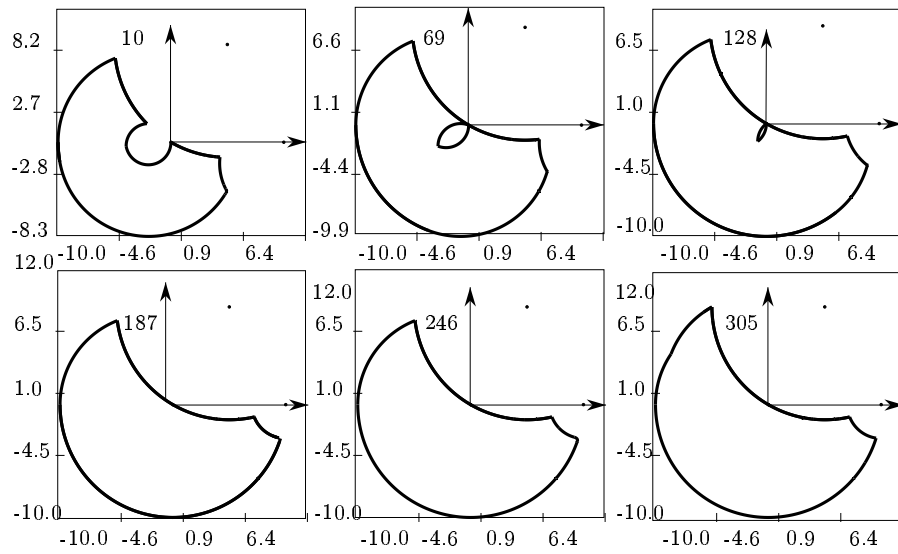


FIG. 1.28 - *EMOI pour le robot 4 et pour différents intervalles d'orientation $\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$ (les intervalles commencent à 0).*

1.4.2 Cas du robot 3 – *RRR*

L'algorithme décrit pour le calcul de l'espace maximal doit simplement être adapté pour prendre en compte l'intervalle d'orientation. Ainsi on ne considère pas dans le calcul d'intersection l'ensemble des cercles définissant les couronnes annulaires des segments 1 et 2 mais seulement les arcs où l'orientation de la plate-forme mobile appartient à l'intervalle d'orientation. L'intersection de ces arcs avec la couronne annulaire permettra le calcul de la frontière de l'espace maximal à orientation inclusive.

1.4.3 Cas du robot 3 – *PRR*

Comme pour les robots de type 3 – *RPR* on modifie simplement l'algorithme de calcul de l'espace maximal afin de prendre en compte l'intervalle d'orientation dans la détermination des arcs de la phase 1 et les arcs de sextique. Une simple transposition de l'algorithme nous permettra donc de calculer l'espace maximal à orientation inclusive pour ce type de robot.

1.5 Espace à orientation totale

1.5.1 Cas du robot 3 – RPR

Dans cette section nous nous proposons de calculer la frontière de la région constituée par l'ensemble des positions atteignables par le robot avec toutes les orientations d'un intervalle donné $[\theta_i, \theta_j]$, que nous appellerons l'intervalle d'orientation. Rappelons que l'orientation de la plate-forme mobile est définie par l'angle entre l'axe x du repère de référence et la ligne B_3, B_1 .

Remarquons tout d'abord qu'il est facile de déterminer si un point fait partie de cet espace : pour cela il suffit de calculer les intervalles d'orientation permis en ce point (c.f. section 1.3.1) et de vérifier qu'un de ces intervalles contient l'intervalle d'orientation. Pour un point de la frontière de l'espace à orientation totale le robot aura un segment en butée. En effet, s'il est clair qu'au moins un segment doit être en butée, il ne peut y en avoir deux puisque dans ce cas l'orientation du manipulateur est unique.

Supposons tout d'abord que l'orientation de la plate-forme mobile pour un point de la frontière corresponde à l'une des bornes θ_i, θ_j de l'intervalle d'orientation. Lorsque le point B_i se déplace sur un des cercles de la couronne annulaire \mathcal{G}_i le point B_3 se déplace sur un cercle de même rayon dont le centre est celui de la couronne annulaire translaté du vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{B}_3$ (qui est constant puisque l'orientation est fixée). Pour les orientations θ_i, θ_j on obtient ainsi comme éléments potentiels de la frontière 12 cercles de centre et rayon $(A_3, \rho_{max}^3), (A_3, \rho_{min}^3), (A_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3, \rho_{max}^1), (A_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3, \rho_{min}^1), (A_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_3, \rho_{max}^2), (A_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_3, \rho_{min}^2)$.

Supposons maintenant qu'un point de la frontière soit atteint pour une orientation différente de θ_i, θ_j . Comme le point fait partie de la frontière l'arc de cercle de centre B_3 , de rayon $\|\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1\|$, d'angle θ_i, θ_j qui est décrit par B_1 lorsque l'orientation de la plate-forme varie entre θ_i et θ_j doit être inclus dans \mathcal{G}_1 et est tangent en un point à cette couronne par exemple au cercle de rayon ρ_{max}^1 (figure 1.29). Cette tangence implique que dans cette configuration le point B_3 se trouve sur un cercle de centre A_1 , de rayon $\rho_{max}^1 - \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|$. Ce cas de figure introduit donc comme élément potentiel de la frontière de l'espace les cercles de centre et rayon $(A_1, \rho_{max}^1 - \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|), (A_1, \rho_{min}^1 - \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|), (A_2, \rho_{max}^2 - \|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\|), (A_2, \rho_{min}^2 - \|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\|)$, soit 4 cercles supplémentaires.

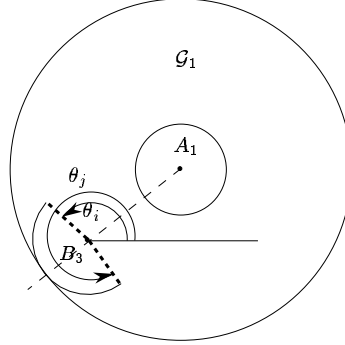


FIG. 1.29 - Le point B_3 fait partie de la frontière lorsque l'arc de centre B_3 , de rayon $\|B_3 B_1\|$, d'angle θ_i, θ_j est inclus dans \mathcal{G}_1 et tangent en un point à cette couronne.

Pour qu'un point B_3 fasse partie de l'espace à orientation totale il est nécessaire qu'il soit inclus dans les 12 premiers cercles que nous venons de définir. Pour ce qui concerne les 4 derniers seuls les arcs de cercles tels que l'orientation de la plate-forme est dans l'intervalle d'orientation nous intéressent. Notons cependant que les extrémités de ces arcs correspondent à l'intersection du cercle avec l'un des 12 premiers.

En conséquence, la frontière de l'espace à orientation totale est constituée de l'intersection de ces 16 cercles, elle sera donc constituée d'arcs de cercle et l'algorithme utilisé pour le calcul de l'espace à orientation fixée pourra être utilisé pour calculer cette intersection. Les figures 1.30, 1.31 présentent des exemples d'espace à orientation totale. Le temps de calcul s'établit à environ 100 ms.

1.5.2 Cas du robot 3 – RRR

Pour ce type de robot l'algorithme décrit précédemment s'applique de la même manière si l'on remplace dans le calcul des rayons des cercles les valeurs ρ_{max}^i par $l_1^i + l_2^i$ et ρ_{min}^i par $|l_1^i - l_2^i|$.

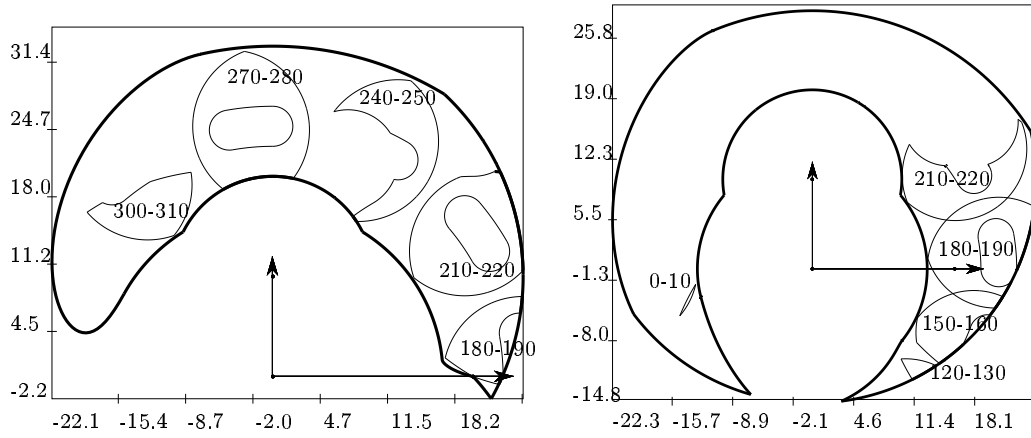


FIG. 1.30 - Exemples d'espace à orientation totale pour le robot 1 et le robot 2 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$).

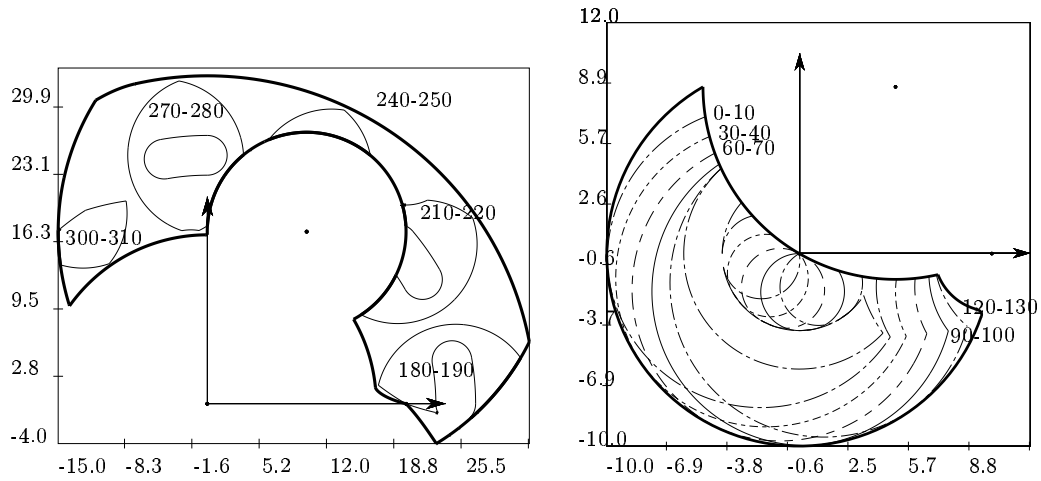


FIG. 1.31 - Exemples d'espace à orientation totale pour le robot 3 et le robot 4 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$).

1.5.3 Cas du robot 3 – PRR

Soit A_i^M, A_i^m les positions extrêmes que peut atteindre le point d'articulation M_i . Pour ce type de robot les régions qui interviennent sont :

- la zone que peut décrire B_3 (que nous avons présentée dans les sections précédentes)
- les cercles de centre $A_1^M, A_1^m + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3$, et de rayon l_2^1
- les cercles de centre $A_2^M, A_2^m + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_3$, et de rayon l_2^2

les deux derniers correspondant au cas où l'orientation de la plate-forme est l'une des bornes de l'intervalle d'orientation.

Lorsque l'orientation varie entre les bornes de l'intervalle d'orientation, par le même raisonnement que pour les robots de type 3 – RRR, le point B_3 décrit un cercle de centre A_i et de rayon $l_2^i - \|\mathbf{B}_i\mathbf{B}_3\|$ pour une position fixée du point A_i . En conséquence lorsque le point A_i varie entre A_i^M, A_i^m le point B_3 se trouve à l'intérieur d'une zone composée d'un rectangle de largeur égale à la course de l'actionneur linéaire et de hauteur $2(l_2^i - \|\mathbf{B}_i\mathbf{B}_3\|)$, surmonté de deux demi-cercles centrés en A_i^M, A_i^m et de rayon $l_2^i - \|\mathbf{B}_i\mathbf{B}_3\|$ (figure 1.32). On

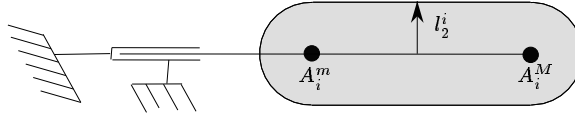


FIG. 1.32 - La zone maximale décrite par B_3 lorsque l'orientation est dans l'intervalle d'orientation.

calcule donc ces zones pour les segments 1 et 2 et l'intersection de l'ensemble des frontières des zones fournit la frontière de l'espace à orientation totale.

1.6 Espace dextre

L'espace dextre est la région atteignable par le point de référence avec toutes les orientations possibles. Notons que l'espace dextre n'est ainsi qu'un cas particulier d'espace à orientation totale.

Kumar [10],[11] a montré qu'il existe des conditions nécessaires sur les visseurs associés aux mouvements des robots pour qu'une position du point de référence soit sur la frontière de l'espace dextre et a utilisé cette méthode pour le calcul de l'espace dextre des robots de type 3 – *RRR*. Toutefois la méthode ne s'applique pas aux actionneurs prismatiques et la prise en compte des butées mécaniques est difficile à introduire dans la théorie. Pennock a présenté un algorithme géométrique de calcul de l'espace dextre pour les robots de type 3 – *RRR* qui est identique à celui que nous allons proposer [17],[18].

1.6.1 Cas des robots 3 – *RPR*

Rappelons que l'espace dextre est l'ensemble des positions du centre de la plate-forme où toutes les orientations sont permises. Considérons un robot de type 3 – *RPR* et un point particulier C_1 de cet espace; comme toutes les orientations sont permises un point B_i doit pouvoir décrire un cercle de centre C_1 et de rayon $\|\mathbf{CB}_i\|$. Ce cercle doit être contenu dans la couronne annulaire \mathcal{G}_i du segment i . La zone permise pour C en raison des contraintes sur le segment i , si elle existe, est donc la couronne annulaire CA_i dont les frontières sont les cercles de centre A_i et de rayons $\rho_{min}^i + \|\mathbf{CB}_i\|$ et $\rho_{max}^i - \|\mathbf{CB}_i\|$ qui n'existe que si $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i \geq 2\|\mathbf{CB}_i\|$ (figure 1.33). L'espace dextre est donc l'intersection des trois zones CA_i . La figure 1.34 présente un exemple d'espace dextre. On peut aussi inclure dans cette méthode des contraintes sur les articulations.

1.6.2 Cas du robot 3 – *RRR*

Comme pour les robots de type 3 – *RPR* les points B_i doivent être inclus dans une couronne annulaire. La zone permise pour C en raison des contraintes sur le segment i , si elle existe, est donc tout simplement la couronne annulaire CA_i dont les frontières sont les cercles de centre A_i et de rayons $|l_2^i - l_1^i| + \|\mathbf{CB}_i\|$

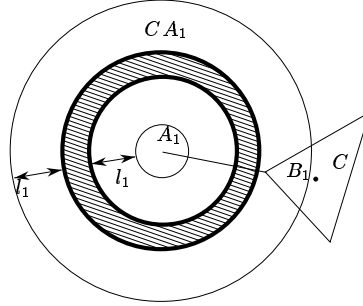


FIG. 1.33 - L'espace dextre de C en prenant en compte uniquement les contraintes sur le segment 1 (en trait hachuré, $l_1 = \|\mathbf{CB}_1\|$).

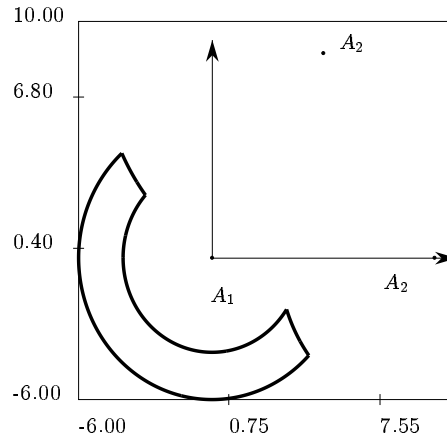


FIG. 1.34 - Exemple de calcul de l'espace dextre pour le robot 4 ($\rho_1 \in [2, 8]$, $\rho_2 \in [5, 25]$, $\rho_3 \in [10, 25]$, temps de calcul: 80ms).

et $l_1^i + l_2^i - \|\mathbf{CB}_i\|$ qui existe seulement si $l_1^i + l_2^i > \|\mathbf{CB}_i\|$ et $l_1^i + l_2^i - |l_2^i - l_1^i| > 2\|\mathbf{CB}_i\|$. L'espace dextre est alors l'intersection des trois couronnes annulaires CA_i .

1.6.3 Cas du robot 3 – PRR

Nous avons déterminé dans la section consacrée au calcul de l'espace à orientation constante les régions atteignables par les points B_i pour ce type de robot. Il faut alors déterminer l'ensemble des positions du point C telles que le cercle centré en C de rayon $\|\mathbf{CB}_i\|$ soit totalement inclus dans la région du point B_i . Un simple raisonnement géométrique montre qu'alors cette région n'existe que si $l_2^i > \|\mathbf{CB}_i\|$ et est de deux types (figure 1.35):

- si $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i > 2l_2^i$ un rectangle de hauteur $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i$ et largeur $2(l_2^i - \|\mathbf{CB}_i\|)$ surmonté par deux demi-cercles de rayon $l_2^i - \|\mathbf{CB}_i\|$ (à gauche sur la figure)
- si $\rho_{max}^i - \rho_{min}^i < 2l_2^i$ l'intersection des deux cercles de rayons $l_2^i - \|\mathbf{CB}_i\|, l_2^i + \|\mathbf{CB}_i\|$ centrés en $z = \rho_{max}^i$ plus l'intersection de deux cercles de mêmes rayons mais centrés en $z = \rho_{min}^i$ (à droite sur la figure).

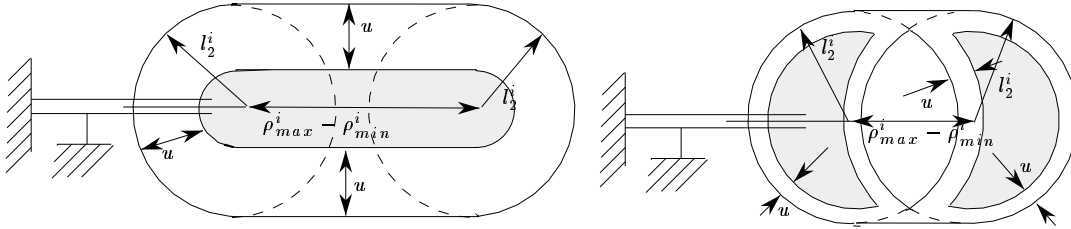


FIG. 1.35 - L'espace dextre de C pour un robot de type 3 – PRR en prenant en compte uniquement les contraintes sur le segment 1 (en grisé, $u = \|\mathbf{CB}_1\|$).

L'espace dextre est alors l'intersection des 3 zones obtenues pour chacun des B_i . L'algorithme que nous avons présenté dans [16] permet de calculer cette intersection.

Chapitre 2

Planification de trajectoire

2.1 Introduction

Pour les robots parallèles le problème de la planification de trajectoire se pose plutôt en terme de gestion de l'espace de travail qu'en terme de chemin dans un univers encombré d'obstacles. Il s'agit de trouver une trajectoire complètement incluse dans l'espace de travail et permettant de joindre deux points. Ce type de problème n'apparaît pas traité dans la littérature consacrée aux robots parallèles plans.

On va distinguer deux types de trajectoires selon des ordres de priorité :

- trajectoire la plus courte en terme des déplacements du point de référence. Pour ce type de trajectoire on cherche à minimiser la longueur euclidienne du chemin parcouru par le point de référence. Pour ce qui concerne les orientations on tentera d'avoir en chaque point l'orientation obtenue par interpolation linéaire entre l'orientation de départ et d'arrivée mais la priorité sera le plus court chemin même si cela impose une loi différente pour l'orientation. Les orientations aux points de départ et d'arrivée doivent cependant être respectées. On parlera alors de *trajectoire minimale*.
- trajectoire la plus courte en terme du changement d'orientation. Pour les trajectoires dont les points de départ et d'arrivée ont même orientation on tentera de trouver un chemin où l'orientation reste constante.

Si plusieurs possibilités existent on retiendra celle pour laquelle la distance parcourue par le point de référence est minimale. Si on ne trouve pas un tel chemin on cherchera une trajectoire qui minimise l'intégrale de la différence entre l'orientation de consigne et celle suivie le long de la trajectoire. Pour les trajectoires pour lesquelles le point de départ et d'arrivée ont des orientations différentes on vérifiera simplement s'il existe un chemin en ligne droite permettant l'interpolation linéaire de l'orientation en fonction de la distance parcourue. On parlera alors de *trajectoire validée*.

Dans ce qui suit on recherchera des trajectoires composées uniquement de segments de droite. On notera M_1 le point de départ et M_2 le point d'arrivée de la trajectoire à planifier. Les coordonnées de M_1 dans le repère de référence seront notées (x_1, y_1) et celles de M_2 (x_2, y_2) et les orientations θ_1, θ_2 . On supposera bien entendu que les points M_1, M_2 sont des positions valides du manipulateur.

2.2 Loi d'orientation

On appellera *loi d'orientation* \mathcal{L} toute fonction qui associe à chaque position du point de référence une orientation:

$$\mathcal{L} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \theta \in [0, 2\pi]$$

On imposera que toute loi d'orientation est de classe au moins C^0 .

2.2.1 Interpolation linéaire

Une loi d'orientation qui sera souvent utilisée en robotique est l'interpolation linéaire:

$$\begin{aligned} &\text{si } x_1 \neq x_2 \\ &\mathcal{L}_{il}(M_1, M_2) : (x, y) \rightarrow \theta = \theta_1 + \frac{(x - x_1)(\theta_2 - \theta_1)}{(x_2 - x_1)} \\ &\text{sinon} \\ &\mathcal{L}_{il}(M_1, M_2) : (x, y) \rightarrow \theta = \theta_1 + \frac{(y - y_1)(\theta_2 - \theta_1)}{(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

L'inconvénient de l'interpolation linéaire est que l'on ne sait pas déterminer pour un robot parallèle plan si une trajectoire constituée d'un segment de droite pour le point de référence et d'une interpolation linéaire pour l'orientation est entièrement dans l'espace de travail. En effet, pour cette détermination il faut tester si lors du mouvement la trajectoire des points B_1, B_2 coupe les cercles des couronnes annulaires associées aux segments. Mais cette trajectoire est une partie de cycloïde d'équation:

$$\begin{aligned} & \text{pour } \alpha \in [0, 1] \\ x &= x_1 + \alpha(x_2 - x_1) + r \cos(\theta_1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)) \\ y &= y_1 + \alpha(y_2 - y_1) + r \sin(\theta_1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)) \end{aligned}$$

où r est la distance constante du point de référence au point B_i considéré. Nous n'avons pas réussi à déterminer une expression explicite pour cette intersection. Toutefois si l'écart $\theta_2 - \theta_1$ est suffisamment petit on peut approcher la cycloïde par un segment de droite. On peut alors montrer que pour un segment donné l'écart maximum entre le segment de droite et la cycloïde est maximum pour $\alpha = 0.5$ et vaut $d_m = r^2(\theta_2 - \theta_1)^4$. Une procédure appelée *cycloïde-in-zone* permet de tester si les segments approchant les cycloïdes sont bien à l'intérieur des \mathcal{G}_i et retourne la distance minimale entre les cercles constituant les \mathcal{G}_i et le segment. Si cette distance est supérieure à d_m nous pouvons garantir que la cycloïde est effectivement à l'intérieur des \mathcal{G}_i . Dans le cas contraire, un drapeau indique que le résultat de la procédure *cycloïde-in-zone* peut être entaché d'erreur.

2.3 Trajectoire minimale à orientation constante

Dans cette section on suppose que les orientations des points de départ et d'arrivée sont identiques.

2.3.1 Vérification de la trajectoire en ligne droite

Il apparaît clairement que la trajectoire en ligne droite joignant les points de départ et d'arrivée est un élément important pour une trajectoire minimale. En préalable à tout calcul de trajectoire nous procédons au calcul de l'espace

maximal du robot considéré. Il est clair que si le segment M_1M_2 n'est pas entièrement dans l'espace maximal la trajectoire en ligne droite ne sera pas réalisable. Pour déterminer si le segment est contenu dans la région fermée qu'est l'espace maximal il suffit de déterminer si le segment a une intersection avec la frontière de la région, auquel cas au moins une partie du segment sera en dehors de l'espace maximal. S'il n'y a pas d'intersection, il suffit de vérifier qu'un point du segment est bien à l'intérieur de l'espace maximal (rappelons que l'on dispose d'un test simple permettant de vérifier si un point est dans cet espace, voir section 1.3.1).

La frontière de l'espace maximal est constituée d'arcs de cercle et d'arcs de sextique. Si l'intersection d'un segment avec un arc de cercle ne pose pas de problème il n'en est pas de même pour l'intersection d'un segment avec un arc de sextique. On va tout d'abord s'intéresser à l'intersection d'une droite avec la sextique décrite par un mécanisme à 4 barres. Pour des raisons évidentes il existe au plus six points d'intersection entre ces éléments. Soient x, y les coordonnées d'un point d'intersection M entre la droite et la sextique. L'appartenance de M à la droite passant par les points M_1, M_2 implique l'existence d'un scalaire α tel que :

$$x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \quad (2.1)$$

$$y = y_1 + \alpha(y_2 - y_1) \quad (2.2)$$

Si x_{b_i}, y_{b_i} définissent les coordonnées du point B_i dans le repère de référence et en utilisant les notations classiques d'un mécanisme à 4 barres on a :

$$x_{b_1} = x - b \cos \lambda \quad (2.3)$$

$$y_{b_1} = y - b \sin \lambda \quad (2.4)$$

$$x_{b_2} = x - a \cos(\gamma + \lambda) \quad (2.5)$$

$$y_{b_2} = y - a \sin(\gamma + \lambda) \quad (2.6)$$

Rappelons que nous avons:

$$x_{b_1}^2 + y_{b_1}^2 = r^2 \quad (2.7)$$

$$(x_{b_2} - p)^2 + y_{b_2}^2 = s^2 \quad (2.8)$$

après substitution dans les équations (2.7, 2.8) des équations (2.3, 2.4, 2.5, 2.6) et simplification nous obtenons un système linéaire en terme des $\cos \lambda, \sin \lambda$

que nous résolvons. Nous écrivons ensuite l'équation de contrainte $\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1$ qui nous conduit alors à un polynôme de degré 6 en α . La résolution numérique de ce polynôme nous permet de déterminer les points d'intersection entre la droite et la sextique.

La recherche des intersections entre le segment et l'arc de sextique nous conduit à éliminer toutes les solutions du polynôme qui ne sont pas comprises entre 0 et 1. Dans un second temps, nous recherchons les angles ϕ_m, ψ_m du mécanisme à 4 barres correspondant à la position du point d'intersection. Rappelons qu'un arc de sextique est déterminé par un intervalle pour l'angle ϕ et à un signe pour la discrimination entre les deux valeurs possibles de l'angle ψ . Pour tester l'appartenance du point d'intersection à un arc de sextique il suffit alors de vérifier que l'angle ϕ_m est bien dans l'intervalle permis pour l'angle ϕ et que le signe correspondant au calcul de l'angle ψ_m correspond bien à celui de l'arc de sextique.

La recherche de l'intersection du segment avec les éventuels arcs de sextique, partie de la frontière de l'espace maximal, va donc consister pour chaque arc à reconstruire le mécanisme à 4 barres qui a conduit à cet arc puis à calculer les intersections entre la droite passant par M_1, M_2 et la sextique complète et, enfin, à éliminer les solutions qui ne sont pas sur le segment ou sur l'arc de sextique.

La procédure ainsi décrite permet de déterminer si un segment est complètement inclus dans un espace quelconque (puisque tous les espaces que nous avons définis admettent comme frontière une liste d'arcs de cercle ou de sextique). Cette procédure sera désignée par la suite sous le nom de **segment-coupe-zone**.

A ce stade nous avons donc réussi à déterminer si la ligne droite est une trajectoire potentielle. Si le test indique que la ligne droite n'est pas une trajectoire valide nous chercherons une trajectoire générale par une méthode que nous décrirons dans une des sections suivantes.

2.3.2 Recherche de la trajectoire en ligne droite, orientation constante

Nous supposons maintenant que le segment M_1M_2 est entièrement inclus dans l'espace maximal. Bien entendu dans le cas que nous traitons la trajectoire optimale est la ligne droite avec l'orientation du manipulateur maintenue

identique sur toute la trajectoire. Pour déterminer si cette trajectoire est valide il suffit de calculer l'espace à orientation fixée. Rappelons que la frontière de cet espace est constituée d'arcs de cercle et que nous savons décomposer cette zone dans ces différentes composantes.

La procédure **segment-coupe-zone** permet alors de déterminer si le segment est bien complètement inclus dans l'espace de travail à orientation fixée. Si tel est le cas le travail de planification est terminé comme le montre l'exemple de la figure 2.1. Mais si cette trajectoire est non valide (i.e. la ligne droite coupe

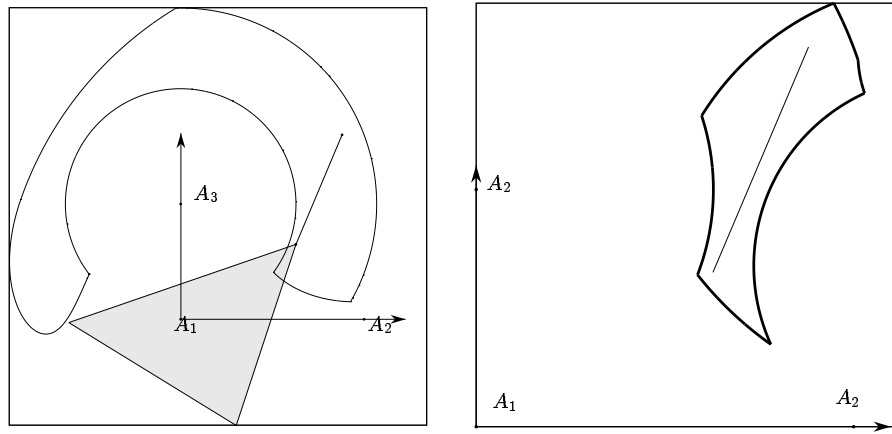


FIG. 2.1 - Exemple de trajectoire en ligne droite et à orientation constante pour le robot 2 ($x_1 = 10, y_1 = 6.5, \theta_1 = 199^\circ, x_2 = 14, y_2 = 16, \theta_2 = 199^\circ$, temps de calcul $\approx 5ms$). A droite on a dessiné l'espace de travail à orientation fixée pour montrer que les points peuvent être bien joints par le segment de droite.

l'espace à orientation fixée) cela n'implique pas que la trajectoire en ligne droite n'est pas possible.

2.3.3 Recherche de la trajectoire en ligne droite, orientation variable

Dans cette section nous supposons que le segment M_1M_2 est entièrement inclus dans l'espace maximal mais qu'il n'est pas inclus dans l'espace à orientation fixée. Nous cherchons à déterminer si la trajectoire en ligne droite mais à orientation non constante est possible.

Pour cela nous découpons la ligne droite en n morceaux de longueurs identiques et nous dirons que nous sommes au *niveau* m de l'algorithme lorsque la droite est découpée en $m + 1$ morceaux.

Supposons que l'on soit à un niveau m . La droite est alors découpée en m morceaux notés D_1, \dots, D_m et l'extrémité de D_i la plus proche de M_1 sera notée D_i^1 . Nous construisons alors un graphe valué de la manière suivante : pour chaque D_i^1 nous associons autant de nœuds de ce graphe qu'il existe d'intervalles d'orientations possibles en ce point. Les voisins de chacun de ces nœuds sont les nœuds obtenus pour les points D_{i-1}^1, D_{i+1}^1 . En chacun des nœuds il existe donc un unique intervalle d'orientation possible. Aux nœuds correspondant aux points M_1, M_2 nous associons l'orientation voulue en ces points.

Nous entamons ensuite une recherche de plus court chemin en utilisant un algorithme de type A^* . Pour cela il est nécessaire de définir une distance entre deux nœuds i, j . On va supposer qu'au nœud i est associée une orientation θ_i unique alors qu'au nœud j est associé un intervalle d'orientations. On associe alors au nœud j une orientation θ_j qui sera soit le milieu de l'intervalle d'orientation θ_j^m , soit, si l'écart entre θ_j^m et θ_i est trop grand une valeur proche de θ_i compris dans l'intervalle d'orientation (dans notre implantation nous avons choisi de prendre la valeur des angles $\theta_i + 5, \theta_i - 5$ la plus proche de θ_j^m).

Comme nous favorisons la loi d'orientation de type interpolation linéaire si l'intervalle $[\theta_i, \theta_j]$ est de faible amplitude on utilise la procédure *cycloïde-in-zone* pour déterminer si la trajectoire entre les deux nœuds est valide. Si le drapeau de cette procédure indique un risque d'erreur (voir la section 2.2.1) on teste si le segment de droite associé au nœud i, j est complètement inclus dans l'espace à orientation totale avec comme intervalle $[\theta_i, \theta_j]$ (rappelons que nous savons calculer la frontière de cet espace qui n'est constituée que d'arcs de cercle).

Si la réponse est positive la distance entre les deux nœuds sera alors la longueur du segment de droite. L'orientation au nœud j est alors fixée et l'on

peut utiliser maintenant pour parcourir le segment toute loi d'orientation qui assure qu'en chacun des points l'orientation reste dans l'intervalle $[\theta_i, \theta_j]$. Si la réponse est négative la distance entre les deux nœuds est fixée à une valeur arbitrairement grande.

Notons que l'utilisation de l'espace à orientation totale peut faire que deux nœuds qui peuvent être joints par un segment de droite avec une loi d'orientation imposant une orientation non incluse dans $[\theta_i, \theta_j]$ vont être vus comme ne pouvant être joints.

L'initialisation de cet algorithme est correcte puisque le A^* va commencer sa recherche par le nœud associé au point M_1 qui a bien une orientation unique.

L'algorithme de détermination de trajectoire va alors consister à initialiser le niveau à 1 et à rechercher une trajectoire à ce niveau. Si la recherche échoue, on augmente alors le niveau d'une unité et l'on recommence. Si la recherche aboutit, la trajectoire est alors décrite par un chemin dans le graphe, à chaque nœud étant associé une position et une orientation unique. La trajectoire entre deux nœuds successifs sera, pour le point de référence, le segment de droite. Pour l'orientation toute loi qui assure qu'aux points extrêmes du segment l'orientation est celle associée aux nœuds et que sur le segment l'orientation est toujours comprise entre ces deux valeurs est valide (par exemple on pourra utiliser une interpolation linéaire).

La figure 2.2 illustre ainsi une trajectoire en ligne droite à orientation constante impossible alors que la figure 2.3 montre la trajectoire à orientation non constante qui a été trouvée par l'algorithme. Il est clair que l'algorithme décrit peut ne pas trouver de trajectoire même s'il en existe une. Supposons par exemple qu'il n'existe qu'une trajectoire solution de la planification c'est-à-dire qu'en chaque point du segment joignant les points M_1 et M_2 il n'existe qu'une orientation possible. Or à chaque niveau de notre algorithme nous n'avons associé qu'une orientation à chaque nœud du graphe c'est-à-dire pour une position sur le segment. Il est donc possible que cette orientation soit différente de celle nécessaire: la trajectoire ne sera pas trouvée.

Une possibilité serait de ne plus créer un seul nœud pour chacun des intervalles d'orientation associés aux D_i^1 mais de discrétiser cet intervalle et de créer un nœud pour chacune des orientations de la discrétisation. Mais cette adaptation, qui augmente notablement la taille du graphe, n'assurera tout de même pas que l'on trouvera la trajectoire.

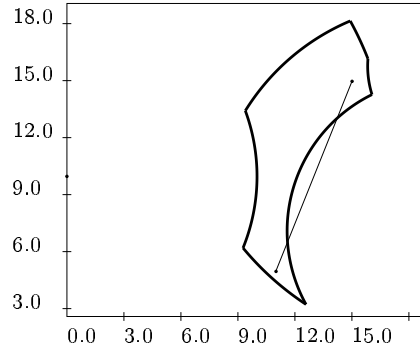


FIG. 2.2 - Exemple de trajectoire en ligne droite à orientation constante impossible pour le robot 2 ($x_1 = 11, y_1 = 5, \theta_1 = 200^\circ, x_2 = 15, y_2 = 15, \theta_2 = 200^\circ, \rho_1 \in [8, 12], \rho_2 \in [5, 15], \rho_3 \in [10, 17]$).

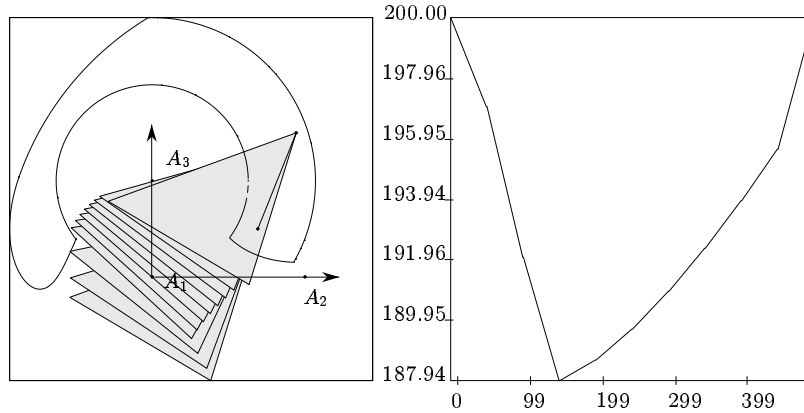


FIG. 2.3 - Exemple de trajectoire en ligne droite mais à orientation non constante pour le robot 2 ($x_1 = 11, y_1 = 5, \theta_1 = 200^\circ, x_2 = 15, y_2 = 15, \theta_2 = 200^\circ$, temps de calcul $\approx 1466ms$). A droite la variation d'orientation le long de la trajectoire ($\rho_1 \in [8, 12], \rho_2 \in [5, 15], \rho_3 \in [10, 17]$).

2.3.4 Trajectoire générale

Dans le cas où l'heuristique de la section précédente ne fournit pas de trajectoire on se trouve placé dans le cas le plus général de la recherche d'une trajectoire que nous traiterons dans la section 2.4.2.

2.4 Trajectoire minimale à orientation variable

Dans cette section nous supposons que les orientations aux points M_1, M_2 sont différentes.

2.4.1 Vérification de la trajectoire en ligne droite

On va tout d'abord vérifier si la trajectoire en ligne droite est possible. Pour cela on s'assure que le segment est entièrement inclus dans l'espace maximal. Puis nous calculons l'espace à orientation totale pour l'intervalle d'orientation défini par les orientations aux points de départ et d'arrivée (c'est-à-dire l'ensemble des positions atteignable avec toutes les orientations de l'intervalle). Rappelons que la frontière de cet espace est constituée d'arcs de cercle. Pour cela nous testons si le segment M_1M_2 est entièrement inclus dans l'espace. Si tel est le cas la trajectoire en ligne droite avec une loi d'orientation assurant qu'en tout point du segment l'orientation reste comprise dans l'intervalle (par exemple une interpolation linéaire) est une trajectoire valide. La figure 2.4 présente une trajectoire obtenue par cette méthode. Si le segment M_1M_2 n'est pas inclus dans l'espace à orientation totale cela ne signifie pas que la trajectoire en ligne droite n'est pas valide puisqu'une loi d'orientation n'impliquant pas que l'orientation soit toujours incluse dans l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ peut conduire à une trajectoire valide.

On applique alors l'heuristique décrite dans la section 2.3.3 en imposant que l'orientation aux nœuds associés aux points de départ et d'arrivée soient les orientations de consigne. La figure 2.5 présente une trajectoire obtenue par cette méthode.

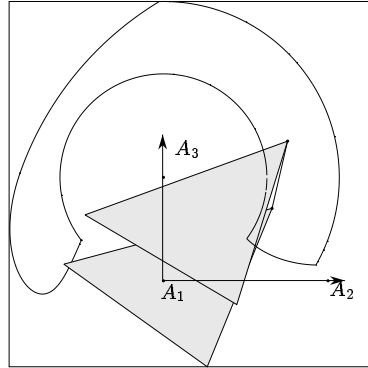


FIG. 2.4 - *Exemple de trajectoire en ligne droite avec orientation variable pour le robot 2 ($x_1 = 10.5, y_1 = 7, \theta_1 = 195^\circ, x_2 = 12, y_2 = 13.5, \theta_2 = 200^\circ, \rho_1 \in [8, 12], \rho_2 \in [5, 15], \rho_3 \in [10, 17]$). Sur la trajectoire toutes les orientations comprises entre les orientations aux points de départ et d'arrivée sont permises. On a utilisé une interpolation linéaire comme loi d'orientation.*

2.4.2 Recherche d'une trajectoire générale

Si les heuristiques proposées dans les sections précédentes ont échoué nous sommes confrontés au problème le plus général de planification. En robotique général nous connaissons la difficulté de ce type de tâche [12]. Toutefois notre problème présente des aspects avantageux:

- la recherche de la trajectoire pour le point de référence est limitée à une région bornée dont on connaît la frontière.
- notre système n'a que trois degrés de liberté.

Par contre nous n'entrons pas dans une hypothèse simplificatrice souvent adoptée en planification générale, à savoir l'évolution dans un monde polygonal. Les techniques de type graphe de visibilité [13] ne s'appliquent donc pas dans l'état. Nous allons proposer diverses heuristiques pour résoudre le problème.

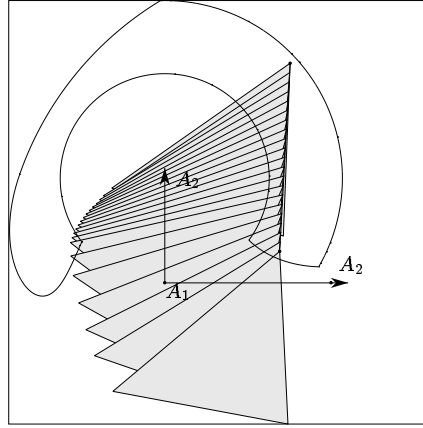


FIG. 2.5 - Exemple de trajectoire en ligne droite avec orientation variable pour le robot 2 ($x_1 = 12, y_1 = 21, \theta_1 = 215^\circ$, $x_2 = 11, y_2 = 3, \theta_2 = 220^\circ$, temps de calcul: 2049ms, $\rho_1 \in [8, 12]$, $\rho_2 \in [5, 15]$, $\rho_3 \in [10, 17]$). L'heuristique a permis de déterminer une loi d'orientation qui rend la ligne droite valide.

2.4.3 Recherche par discrétisation de l'espace maximal

Nous utilisons une généralisation de la technique que nous avons déjà utilisée dans les sections précédentes. Nous construisons un graphe valué en discrétisant l'espace maximal et en créant un nœud du graphe pour chaque intervalle d'orientation possible pour les points de la discrétisation.

La distance entre deux nœuds voisins du graphe est définie de la même manière que dans la section 2.3.3 et un algorithme de type A^* est utilisé pour trouver un plus court chemin. La figure 2.6 présente une trajectoire obtenue par cette méthode.

2.4.4 Recherche par reconstruction 3D

L'espace de travail d'un robot parallèle plan peut aussi être représenté dans un espace x, y, θ . En effet nous savons construire l'espace à orientation fixée de notre manipulateur et nous pouvons discrétiser la variable θ pour obtenir différentes coupes de l'espace total. La figure 2.7 présente ainsi des vues 3D